EIN KRITERIUM FÜR DIE q-KONVEXITÄT VON RESTMENGEN IN KOMPAKTEN KOMPLEXEN MANNIGFALTIGKEITEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Klaus Fritzsche
aus Hützel, Kreis Soltau

Göttingen 1975

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534921_0070

EIN KRITERIUM FÜR DIE q-KONVEXITÄT VON RESTMENGEN IN KOMPAKTEN KOMPLEXEN MANNIGFALTIGKEITEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Klaus Fritzsche
aus Hützel, Kreis Soltau

Göttingen 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

- D 7 -

Referent: Prof. Dr. H. Grauert

Korreferent: Prof. Dr. M. Schneider

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juli 1975

Einleitung

Das Komplement einer Hyperebene im $\mathbb{P}^n$ ist Steinsch, also 1-vollständig. 1967 bewiesen Andreotti und Norguet, daß das Komplement eines q-codimensionalen linearen Unterraumes im $\mathbb{P}^n$ q-vollständig ist. Schließlich zeigte Barth 1970, daß das Komplement einer beliebigen q-codimensionalen Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{P}^n$ q-konvex ist. Zum Beweis dieses schon nicht mehr trivialen Resultates nutzte Barth die Zweifach-Homogenität des projektiven Raumes aus und berechnete die Leviform der Euklidischen Abstandsfunktion.

Grothendieck stellte die Vermutung auf, daß der Satz von Barth sogar für lokal vollständige Durchschnitte gilt (zumindest in cohomologischem Sinne), während Hartshorne vermutete, daß das Komplement einer q-codimensionalen Untermannigfaltigkeit Y einer kompakten Mannigfaltigkeit X stets q-konvex ist, wenn nur das Normalenbündel $N_X(Y)$ in irgendeinem geeigneten Sinne ampel ist. In der Tat wurde diese zweite Vermutung 1972 von Schneider bestätigt, unter der Voraussetzung, daß $N_X(Y)$ positiv im Sinne von Griffiths ist. Da Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{P}^n$ stets ein positives Normalenbündel besitzen, ist in diesem Ergebnis auch der Satz von Barth enthalten.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Fall untersucht, daß Y ein beliebiger komplexer Unterraum mit Singularitäten in einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist. Es wird ein Kriterium dafür aufgestellt, wann X-Y q-konvex ist. In dem Spezialfall, daß Y lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension q in X und das (in diesem Fall lokal-freie) Normalenbündel positiv ist, ist das Kriterium erfüllt. Für globale vollständige Durchschnitte im $\mathbb{P}^n$ wird zudem die Positivität des Normalenbündels nachgewiesen.

Wichtiges Hilfsmittel im Beweis ist ein Fortsetzungssatz für q-konvexe Funktionen, der zunächst nur für lokal-irreduzible komplexe Räume bewiesen werden kann. Diese Lücke läßt sich schließen, indem man nicht-reduzierte differenzierbare Strukturen auf komplexen Räumen einführt. Auf das Endresultat wirkt sich das über die Definition der Positivität eines Bündels aus. Kapitel I hat deshalb die Entwicklung einer geeigneten differenzierbaren Theorie für komplexe Räume zum Inhalt, einschließlich der notwendigen Sätze über q-konvexe Funktionen und ihre Fortsetzbarkeit.

In Kapitel II werden zunächst Definitionen und bekannte Sätze über lineare Faserräume zusammengestellt. Speziell wird dann die Struktur des Tangentialbündels eines linearen Faserraumes $E \xrightarrow{\pi} X$ untersucht. Man erhält eine kanonische exakte Sequenz $0 \longrightarrow \pi^*E \longrightarrow T(E) \longrightarrow \pi^*T(X)$. Das Resultat wird später verwendet, ist aber auch für sich interessant. Im Rest des Kapitels werden Skalarprodukte auf linearen Faserräumen eingeführt, mit deren Hilfe der Positivitäts-

begriff in sehr allgemeiner Form definiert werden kann, so daß im singularitätenfreien Fall gerade die bekannte Definition von Griffiths herauskommt.

In Kapitel III werden Normalenbündel zu komplexen Unterräumen untersucht, vor allem in Hinblick auf die später zu betrachtenden Beispiele. Das Hauptresultat der Arbeit lautet nun:

Theorem: Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $Y \subset X$ ein komplexer Unterraum. Das Normalenbündel $N = N_X(Y)$ besitze eine durch eine globale Randfunktion s definierte q-konkave Umgebung U des Nullschnittes, so daß für jedes $x \in Y$ die Menge $\overline{U \cap N_x}$ kompakt und sternförmig bezüglich 0_x ist und keine reelle Tangente an $\partial(U \cap N_x)$ in N_x den Nullpunkt trifft. (Ist X kompakt, Y lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension q und N positiv, so sind die Voraussetzungen erfüllt). Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $f : X-Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ und eine offene Umgebung $M = M(Y) \subset X$, so daß gilt:

a) Für $x \in M-Y$ hat die Leviform $Lev_x(f)$ auf $H_x(f) := \{\xi \in T_{X,x} : (d'f)_x(\xi) = 0\}$ mindestens $\dim H_x(f) - q + 1$ positive Eigenwerte.

b) Ist $x_0 \in Y$ und (x_ν) eine Folge von Punkten aus M-Y mit $\lim_{\nu \to \infty} = x_0$, so ist $\{f(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt.

Ist X zusätzlich kompakt, so ist X-Y q-konvex.

Zum Beweis benutzt man die Tatsache, daß es einen linearen Raum L über X und einen holomorphen Schnitt $\xi \in \Gamma(X,L)$ gibt, so daß $L|Y = N$, $L_x \cong \mathbb{C}$ für $x \in X-Y$, $\xi|Y = 0$ und $\xi(x) \neq 0$ für $x \in X-Y$ ist. s kann zu einer q-konvexen Funktion $\hat{s}$ nach L hinein fortgesetzt werden, und die Voraussetzungen sichern, daß man zu jedem x aus M-Y für ein geeignetes $M = M(Y)$ genau ein $k_x \in \mathbb{R}_+$ mit $\hat{s}(k_x \cdot \xi(x)) = 0$ finden kann. Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen zeigt man, daß $x \mapsto k_x$ eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften a) b) ist.

Mit den gleichen Methoden läßt sich auch der duale Fall des negativen Normalenbündels behandeln. Hier zeigt sich aber, daß (zumindest im Fall der lokal vollständigen Durchschnitte in kompakten Mannigfaltigkeiten) der Begriff des schwach negativen Bündels im Sinne von Grauert genügt. Man kann zeigen, daß auf N eine nicht-negative homogene Funktion existiert, die außerhalb des Nullschnittes 1-konvex ist. Mit Hilfe eines zum oben genannten Theorem analogen Satzes folgt, daß X-Y 1-konkav ist. Das ist ein neuer Beweis eines schon bekannten Resultates.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise danke ich Herrn Prof.Dr. H. Grauert sehr herzlich. Ebenso danke ich Herrn Prof.Dr. M. Schneider für eine Reihe von sehr nützlichen Fragen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I Nicht reduzierte differenzierbare Strukturen

§ 1 Differenzierbare Funktionen und Abbildungen 1

§ 2 Tangentialräume und Differentialformen 10

§ 3 Die Levi-Form 13

§ 4 q-konvexe Räume 18

Kapitel II Positive lineare Faserräume über komplexen Räumen

§ 1 Lineare Räume und Vektorbündel 24

§ 2 Das Tangentialbündel eines linearen komplexen Faserraumes 30

§ 3 Unitäre lineare Räume 39

§ 4 Der Positivitätsbegriff 45

Kapitel III Das Restraumproblem für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten

§ 1 Normalenbündel zu komplexen Unterräumen 49

§ 2 q-konvexe Restmengen 53

§ 3 Beispiele 66

Anhang : Eine Charakterisierung der schwach negativen Vektorbündel 70

Literaturverzeichnis

KAPITEL I NICHT REDUZIERTE DIFFERENZIERBARE STRUKTUREN

§ 1 Differenzierbare Funktionen und Abbildungen

R.Richberg hat in seiner Arbeit [13] unter anderem folgenden Satz bewiesen: Sei X ein parakompakter komplexer Raum, $X' \subset X$ ein komplexer Unterraum und s eine streng 1-konvexe differenzierbare Funktion auf X'. Dann gibt es eine offene Umgebung U von X' in X und eine streng 1-konvexe differenzierbare Funktion $\hat{s}$ auf U mit $\hat{s}|_{X'} = s$.

In Spezialfällen (wenn z.B. X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $X' \subset X$ eine lokal-irreduzible analytische Menge ist) läßt sich dieser Satz wesentlich einfacher beweisen und außerdem auf den q-konvexen Fall übertragen (vgl. Satz I.3.9.). Bei beliebigen komplexen Räumen benötigt man die Verheftungsmethoden von Richberg, die nicht auf q-konvexe Funktionen (mit $q > 1$) anwendbar sind. Um dennoch Fortsetzungssätze zu erhalten, muß man den Begriff der differenzierbaren Funktion auf einem komplexen Raum auf andere als die übliche Weise definieren. Das geschieht in diesem Paragraphen.

I.1.1.Satz: Sei $X = (\underline{X}, \mathcal{H}_X)$ ein komplexer Raum, $M = (\underline{M}, \mathcal{H}_M)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\varphi = (\widetilde{\varphi}, \widehat{\varphi}) : X \hookrightarrow M$ eine abgeschlossene Einbettung, definiert durch eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_M$. $\mathcal{A}_M$ sei die Garbe der Keime von beliebig oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf M. Dann gilt:

a) $\widetilde{\mathcal{F}} := (\mathrm{Re}\,\mathcal{F}, \mathrm{Im}\,\mathcal{F})\mathcal{A}_M$ ist eine Idealgarbe in $\mathcal{A}_M$.

b) $D_M(X) := (\underline{X}, \mathcal{D}_{M/X})$ mit $\mathcal{D}_{M/X} := ((\mathcal{A}_M/\widetilde{\mathcal{F}})|\widetilde{\varphi}(\underline{X})) \circ \widetilde{\varphi}$ ist ein differenzierbarer Raum im Sinne von [14].

c) Die kanonische Injektion $\mathcal{H}_M \hookrightarrow \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_M$ mit $\mathfrak{G} \mapsto (\mathrm{Re}\,\mathfrak{G}, \mathrm{Im}\,\mathfrak{G})$ induziert einen Garbenhomomorphismus $j_{M/X}: \mathcal{H}_X \to \mathcal{D}_{M/X} \oplus \mathcal{D}_{M/X}$. Ist X reduziert, so ist $j_{M/X}$ injektiv.

d) Ist Y ein weiterer komplexer Raum, N eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\psi : Y \to N$ eine abgeschlossene Einbettung, so gibt es zu jeder holomorphen Abbildung $\Phi = (\widetilde{\Phi}, \widehat{\Phi}) : X \to Y$ genau eine differenzierbare Abbildung $D_{N,M}(\Phi) = (\widetilde{\Phi}, \widehat{D_{N,M}(\Phi)}) : D_M(X) \to D_N(Y)$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_Y \circ \widetilde{\Phi} & \xrightarrow{\quad\widehat{\Phi}\quad} & \mathcal{H}_X \\ \downarrow{\scriptstyle j_{N/Y} \circ \widetilde{\Phi}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{M/X}} \\ (\mathcal{D}_{N/Y} \circ \widetilde{\Phi}) \oplus (\mathcal{D}_{N/Y} \circ \widetilde{\Phi}) & \xrightarrow{\widehat{D_{N,M}(\Phi)} \oplus \widehat{D_{N,M}(\Phi)}} & \mathcal{D}_{M/X} \oplus \mathcal{D}_{M/X} \end{array}$$

Darüber hinaus gilt:

α) $D_{L,N}(\Psi) \circ D_{N,M}(\Phi) = D_{L,M}(\Psi \circ \Phi)$

β) $D_{M,M}(id_X) = id_{D_M(X)}$

γ) $D_{N,M}(id_X)$ ist ein Diffeomorphismus mit $D_{N,M}(id_X)^{-1} = D_{M,N}(id_X)$.

Beweis: 1) Die kohärente Idealgarbe $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_M$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_z := \begin{cases} \mathrm{Ker}\,(\hat{\varphi}_x) & \text{für } \tilde{\varphi}(x) = z \\ \mathcal{H}_{M,z} & \text{für } z \notin \tilde{\varphi}(\underline{X}). \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\tilde{\mathcal{F}}_z \subset \mathcal{A}_{M,z}$ ein Ideal für jedes $z \in \underline{M}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}_M$ offen ist. Sei $\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}_z$ beliebig vorgegeben. Außerdem seien $\tau_1, \ldots, \tau_l$ Erzeugende von $\mathcal{F}_{z_o}$ über $\mathcal{H}_{M,z_o}$. Es gibt Elemente a_ν, $b_\nu \in \mathcal{A}_{M,z_o}$ mit $\sigma = \sum_{\nu=1}^{l} a_\nu \,\mathrm{Re}\,(\tau_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l} b_\nu \,\mathrm{Im}\,(\tau_\nu)$. Weiter gibt es über einer offenen Umgebung $U(z_o) \subset \underline{M}$ Schnitte s_ν, $t_\nu \in \Gamma(U, \mathcal{A}_M)$ und $g_\nu \in \Gamma(U, \mathcal{H}_M)$ mit $(s_\nu)_{z_o} = a_\nu$, $(t_\nu)_{z_o} = b_\nu$ und $(g_\nu)_{z_o} = \tau_\nu$. Das läßt sich so einrichten, daß $\{(g_\nu)_z, \nu = 1, \ldots, l\}$ für jedes $z \in U$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}_z$ ist. Man setze $s := \sum_{\nu=1}^{l} s_\nu \,\mathrm{Re}(g_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l} t_\nu \,\mathrm{Im}\,(g_\nu)$. Es ist $s \in \Gamma(U, \mathcal{A}_M)$, also $s(U) \subset \mathcal{A}_M$ offen. Andererseits ist aber $\sigma \in s(U) \subset \tilde{\mathcal{F}}$, und das war zu zeigen.

2) $D_M(X) = (\underline{X}, \mathcal{O}_{M/X})$ ist offensichtlich ein $\mathbb{R}$-geringter Raum.

Sei $x_o \in \underline{X}$, $z_o := \tilde{\varphi}(x_o) \in \underline{M}$ und $W(z_o) \subset \underline{M}$ eine offene Umgebung, zu der eine biholomorphe Abbildung $\Phi: W \to B$ auf einen Bereich des $\mathbb{C}^n$ existiert. Sei $A := \tilde{\Phi}(W \cap \tilde{\varphi}(\underline{X}))$, $\mathcal{J} := \widetilde{\hat{\Phi}^{-1}(\mathcal{F} \mid W)} \mid A$, $\mathcal{O}(A) := \mathcal{A}_B \mid A$. Dann ist $D_\Phi := (A, \mathcal{O}(A)/\mathcal{J})$ ein differenzierbarer Unterraum des $\mathbb{R}^{2n}$. Φ induziert einen Isomorphismus von Garben von $\mathbb{R}$-Algebren $\vartheta: (\mathcal{A}_B/\widetilde{\hat{\Phi}^{-1}(\mathcal{F} \mid W)}) \mid A \to (\mathcal{A}_M/\tilde{\mathcal{F}}) \mid \tilde{\varphi}(\underline{X}) \cap W$.

$F_\Phi := (\tilde{\Phi} \circ \tilde{\varphi}, \vartheta \circ \tilde{\varphi}) : D_M(X) \mid U \to D_\Phi$ ist deshalb ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-geringten Räumen, (U, F_Φ, D_Φ) eine differenzierbare Karte für $D_M(X)$ in x_o. Je zwei solche Karten sind miteinander differenzierbar verträglich, da die Übergangsabbildungen von biholomorphen (und damit umkehrbar differenzierbaren) Abbildungen induziert werden. Damit ist $D_M(X)$ ein differenzierbarer Raum.

3) Ist $j: \mathcal{H}_M \hookrightarrow \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}_M$ die kanonische Injektion, so ist $j(\mathcal{F}_{z_o}) \subset \tilde{\mathcal{F}}_{z_o} \oplus \tilde{\mathcal{F}}_{z_o}$. j induziert daher einen Homomorphismus $j_{M/X}: \mathcal{H}_X \to \mathcal{O}_{M/X} \oplus \mathcal{O}_{M/X}$. Ist X ein reduzierter komplexer Raum und $j_{M/X}(f_{z_o} \bmod \mathcal{F}_{z_o}) = 0$, so ist $\mathrm{Re}\, f \mid \tilde{\varphi}(\underline{X}) = \mathrm{Im}\, f \mid \tilde{\varphi}(\underline{X}) = 0$ in der Nähe von z_o. Also ist $f \mid \tilde{\varphi}(\underline{X}) = 0$ in der Nähe von z_o, und das kann nur sein, wenn $f_{z_o} \in \mathcal{F}_{z_o}$ ist. In diesem Fall ist $j_{M/X}$ injektiv.

4) a) Existenz der Abbildung $\mathfrak{D}_{N,M}(\Phi)$:

Sei $\Phi: X \to Y$ gegeben, $x_0 \in \underline{X}$, $y_0 := \widetilde{\Phi}(x_0) \in \underline{Y}$.
Außerdem sei $z_0 := \widetilde{\varphi}(x_0)$, $w_0 := \widetilde{\psi}(y_0)$. Es gibt offene Umgebungen $U(\widetilde{\varphi}(x_0)) \subset \underline{N}$, $V(\widetilde{\psi}(y_0)) \subset \underline{N}$ und eine holomorphe Abbildung $F: U \to V$, so daß für alle $f_{w_0} \in \mathcal{H}_{N,w_0}$ gilt:

$$\hat{\Phi}(\hat{\psi}(f_{w_0})) = \hat{\varphi}((f \circ F)_{z_0}).$$

$p: \mathcal{A}_{M,z_0} \twoheadrightarrow (\mathcal{D}_{M/X})_{x_0}$ und $q: \mathcal{A}_{N,w_0} \twoheadrightarrow (\mathcal{D}_{N/Y})_{y_0}$ seien die kanonischen Projektionen. Dann definiert man:

$$\varrho^F_{x_0}(q(g_{w_0})) := p((g \circ F)_{z_0}).$$

$\varrho^F_{x_0}: (\mathcal{D}_{N/Y})_{y_0} \to (\mathcal{D}_{M/X})_{x_0}$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus: Die abgeschlossene Einbettung $\psi: Y \hookrightarrow N$ werde durch die kohärente Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}_N$ gegeben. Es sei $g_{w_0} \in \operatorname{Ker} q = \widetilde{\mathcal{J}}_{w_0}$. Ferner seien Erzeugende g_ν von $\mathcal{J}_{z_0}$ und f_μ von $\mathcal{J}_{w_0}$ gegeben. Es ist $f_\mu \circ F \in \mathcal{J}_{z_0}$, also $f_\mu \circ F = \sum_\nu r_{\mu\nu} g_\nu$ mit geeigneten $r_{\mu\nu}$. Ist $g_{w_0} = \sum_\mu a'_\mu \operatorname{Re}(f_\mu) + \sum_\mu a''_\mu \operatorname{Im}(f_\mu)$, so folgt:

$$(g \circ F)_{z_0} = \sum_\mu (a'_\mu \circ F) \operatorname{Re}(f_\mu \circ F) + \sum_\mu (a''_\mu \circ F) \operatorname{Im}(f_\mu \circ F) =$$
$$= \sum_\mu (a'_\mu \circ F) \sum_\nu \operatorname{Re}(r_{\mu\nu} g_\nu) + \sum_\mu (a''_\mu \circ F) \cdot \sum_\nu \operatorname{Im}(r_{\mu\nu} g_\nu) =$$
$$= \sum_\nu b'_\nu \operatorname{Re}(g_\nu) + \sum_\nu b''_\nu \operatorname{Im}(g_\nu) \text{ mit gewissen } b'_\nu, b''_\nu.$$

Also ist $(g \circ F)_{z_0} \in \widetilde{\mathcal{J}}_{z_0} = \operatorname{Ker} p$, $\varrho^F_{x_0}$ ist wohldefiniert.

Die Homomorphie-Eigenschaften sind klar.

$\varrho^F_{x_0}$ ist aber sogar unabhängig von F: Sei $G: U \to V$ eine weitere holomorphe Abbildung mit $G \circ \varphi = \psi \circ \Phi$. Es ist $\widetilde{G}(z_0) = \widetilde{F}(z_0) = w_0$ und $\hat{\varphi}((f \circ F)_{z_0}) = \hat{\Phi} \circ \hat{\psi}(f_{w_0}) = \hat{\varphi}((f \circ G)_{z_0})$, also $(f \circ F)_{z_0} - (f \circ G)_{z_0} \in \mathcal{J}_{z_0}$ für alle holomorphen f in z_0. Sei nun $W = W(w_0)$ eine konvexe offene Umgebung und g differenzierbar auf W. Dann ist $V := F^{-1}(W) \cap G^{-1}(W)$ eine offene Umgebung von z_0, und durch $\beta(z,t) := G(z) + t(F(z) - G(z))$ wird eine differenzierbare Abbildung $\beta: V \times [0,1] \to W$ definiert. Es gilt:

$$(g \circ F)(z) - (g \circ G)(z) = g \circ \beta(z,1) - g \circ \beta(z,0) = \int_0^1 \frac{\partial (g \circ \beta)}{\partial t}(z,t)\,dt =$$
$$= \int_0^1 \Big[\sum_\lambda \frac{\partial g}{\partial w_\lambda}(\beta(z,t)) \cdot (w_\lambda \circ F(z) - w_\lambda \circ G(z)) + \sum_\lambda \overline{\frac{\partial g}{\partial w_\lambda}(\beta(z,t))} \cdot (\bar{w}_\lambda \circ F(z) -$$
$$- \bar{w}_\lambda \circ G(z)) \Big] dt = \sum_\lambda h_\lambda(z)(w_\lambda \circ F(z) - w_\lambda \circ G(z)) + \sum_\lambda \bar{h}_\lambda(z) \cdot (\bar{w}_\lambda \circ F(z) - \bar{w}_\lambda \circ G(z)),$$

mit $h_\lambda(z) := \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial w_\lambda}(\beta(z,t))\,dt$ für $\lambda = 1, \ldots, \dim N$.

Also ist $(g\circ F)_{z_o}-(g\circ G)_{z_o} = \sum_\lambda (h_\lambda)_{z_o}(r_\lambda)_{z_o} + \sum_\lambda (\bar h_\lambda)_{z_o}(\bar r_\lambda)_{z_o}$, wobei $(r_\lambda)_{z_o} = (w_\lambda\circ F)_{z_o}-(w_\lambda\circ G)_{z_o} \in \mathcal{J}_{z_o}$ ist. Das bedeutet, daß $(g\circ F)_{z_o}-(g\circ G)_{z_o}$ in $\widetilde{\mathcal{J}}_{z_o}$ liegt. Es ist $\varrho^F_{x_o}(q(g_{w_o})) = \varrho^G_{x_o}(q(g_{w_o}))$. Es ist nun auch klar, daß sich die Homomorphismen $\varrho^F_{x_o}$ zu einem Garbenhomomorphismus $\widehat{D_{N,M}(\Phi)} : \mathcal{O}_{N/Y}\square\widetilde{\Phi} \to \mathcal{O}_{M/X}$ zusammensetzen. $D_{N,M}(\Phi) = (\widetilde{\Phi}, \widehat{D_{N,M}(\Phi)})$ ist eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Räumen. Die Kommutativität des Diagramms ist evident.

b) Eindeutigkeit der Abbildung $D_{N,M}(\Phi)$:

Sei $f = (\tilde f, \hat f): D_M(X) \to D_N(Y)$ irgendeine differenzierbare Abbildung, die das Diagramm kommutativ macht. Sei $x_o \in \underline{X}$, $y_o := \tilde f(x_o) \in \underline{Y}$, $z_o := \tilde\varphi(x_o) \in \underline{M}$ und $w_o := \tilde\psi(y_o) \in \underline{N}$. Es muß $\tilde f = \tilde\Phi$ sein. Zu zeigen bleibt, daß $\widehat{D_{N,M}(\Phi)}_{x_o} = \hat f_{x_o} : (\mathcal{O}_{N/Y})_{y_o} \to (\mathcal{O}_{M/X})_{x_o}$ ist. Es gibt offene Umgebungen $U(z_o) \subset \underline{M}$ und $V(w_o) \subset \underline{N}$, so daß f in x_o von einer differenzierbaren Abbildung $F : U \to V$ induziert wird. Entsprechend wird Φ von einer holomorphen Abbildung $G : U \to V$ induziert. Ist s holomorph in w_o, so folgt:

$(p((\mathrm{Re}\ s\circ G)_{z_o}), p((\mathrm{Im}\ s\circ G)_{z_o})) = j_{M/X}(\hat\varphi((s\circ G)_{z_o})) = j_{M/X}\circ\hat\Phi(\hat\psi(s_{w_o})) =$

$= (\hat f\circ\hat f)\circ(j_{N/Y}\square\tilde\Phi)(\hat\psi(s_{w_o})) = (\hat f\circ q((\mathrm{Re}\ s)_{w_o}), \hat f\circ q((\mathrm{Im}\ s)_{w_o})) =$

$= (p((\mathrm{Re}\ s\circ F)_{z_o}), p((\mathrm{Im}\ s\circ F)_{z_o}))$. Also gilt:

$(\mathrm{Re}\ s\circ F)_{z_o} - (\mathrm{Re}\ s\circ G)_{z_o} \in \widetilde{\mathcal{J}}_{z_o}$, $(\mathrm{Im}\ s\circ F)_{z_o} - (\mathrm{Im}\ s\circ G)_{z_o} \in \widetilde{\mathcal{J}}_{z_o}$.

Wählt man für s Koordinatenfunktionen $w_\lambda = x_\lambda + iy_\lambda$, so erhält man:

$\tau_\lambda := (x_\lambda\circ F)_{z_o} - (x_\lambda\circ G)_{z_o} \in \widetilde{\mathcal{J}}_{z_o}$, $\varrho_\lambda := (y_\lambda\circ F)_{z_o} - (y_\lambda\circ G)_{z_o} \in \widetilde{\mathcal{J}}_{z_o}$.

Mit der gleichen Methode, wie sie im Teil a) angewandt wurde, kann man zeigen: Ist g differenzierbar in w_o, so ist $(g\circ F)_{z_o} - (g\circ G)_{z_o} = \sum_\lambda (h_\lambda)_{z_o}(r_\lambda)_{z_o} + \sum_\lambda (\bar h_\lambda)_{z_o}(\bar r_\lambda)_{z_o}$ mit differenzierbaren Koeffizienten h_λ und $r_\lambda = w_\lambda\circ F - w_\lambda\circ G$, also $(r_\lambda)_{z_o} = \tau_\lambda + i\varrho_\lambda$. Daraus folgt:

$(g\circ F)_{z_o} - (g\circ G)_{z_o} = \sum_\lambda (2\,\mathrm{Re}\,h_\lambda)_{z_o}\tau_\lambda + \sum_\lambda (-2\,\mathrm{Im}\,h_\lambda)_{z_o}\varrho_\lambda \in \widetilde{\mathcal{J}}_{z_o}$.

Das bedeutet aber, daß $\hat f_{x_o} = \widehat{D_{N,M}(\Phi)}_{x_o}$ ist.

5) Die Eigenschaften α, β, γ folgen unmittelbar aus der Eindeutigkeit von $\widehat{D_{N,M}(\Phi)}$. ▼

Mit Hilfe von Satz I. 1.1. kann jetzt jeder komplexe Raum auf kanonische Weise mit einer differenzierbaren Struktur versehen werden. Diese differenzierbare Struktur braucht allerdings nicht notwendig reduziert sein, selbst wenn der komplexe Raum reduziert ist:

Es sei $X = (\underline{X}, \mathcal{H}_X)$ ein beliebiger komplexer Raum. Eine komplexe Karte für X besteht aus einer offenen Menge $U \subset \underline{X}$, einem Bereich B im $\mathbb{C}^n$ und einer abgeschlossenen Einbettung $\varphi: U \hookrightarrow B$.

Sei $\{(U_\iota, \varphi_\iota, B_\iota), \iota \in I\}$ der maximale Atlas von X, also das System aller komplexen Karten für X. Für $\iota \in I$ sei $X_\iota := (U_\iota, \mathcal{H}_X | U_\iota)$, für $(\iota, \varkappa) \in I \times I$ sei $X_{\iota\varkappa} := (U_\iota \cap U_\varkappa, \mathcal{H}_X | U_\iota \cap U_\varkappa)$. Außerdem sei $\mathcal{Q}_\iota := \mathcal{Q}_{B_\iota / X_\iota}$ für $\iota \in I$,

$\varrho_{\varkappa\iota} := D_{B_\varkappa, B_\iota}(\widehat{\mathrm{id}_{X_{\iota\varkappa}}})^{-1} : \mathcal{Q}_\iota | U_\iota \cap U_\varkappa \to \mathcal{Q}_\varkappa | U_\iota \cap U_\varkappa$ für $(\iota, \varkappa) \in I \times I$.

a) Für offene Mengen $U \subset \underline{X}$ sei $\mathcal{Q}(U) :=$

$= \{(s_\iota)_{\iota \in I} : s_\iota \in \Gamma(U \cap U_\iota, \mathcal{Q}_\iota), s_\varkappa = \varrho_{\varkappa\iota} \circ s_\iota$ auf $U \cap U_\iota \cap U_\varkappa\}$.

b) Für offene Mengen $U, V \subset \underline{X}$ mit $V \subset U$ sei $r_V^U : \mathcal{Q}(U) \to \mathcal{Q}(V)$ definiert durch $r_V^U((s_\iota)_{\iota \in I}) := (s_\iota | V \cap U_\iota)_{\iota \in I}$.

Damit ist $\{\mathcal{Q}(U), r_V^U\}$ ein Garbendatum von $\mathbb{R}$-Algebren. $\mathcal{Q}_X$ sei die zugehörige Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren über $\underline{X}$.

I.1.2.Satz: $D(X) := (\underline{X}, \mathcal{Q}_X)$ ist ein differenzierbarer Raum. Ist $U \subset \underline{X}$ offen, so ist $\Gamma(U, \mathcal{Q}_X) = \mathcal{Q}(U)$.

Beweis: 1) Zum Nachweis der zweiten Behauptung verwendet man das Serre'sche Kriterium (vgl. etwa [10]). Zu zeigen ist dann:

a) Sei $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $s, t \in \mathcal{Q}(U)$, $r^U_{U_\alpha} s = r^U_{U_\alpha} t$ für alle α. Dann ist $s = t$.

b) Sei $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $s_\alpha \in \mathcal{Q}(U_\alpha)$, $r^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta} s_\alpha = r^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta} s_\beta$ für alle α, β.

Dann gibt es ein $s \in \mathcal{Q}(U)$ mit $r^U_{U_\alpha} s = s_\alpha$ für alle α.

Beweis zu a): Ist $s = (s_\iota)_{\iota \in I}$, $t = (t_\iota)_{\iota \in I}$ und $r^U_{U_\alpha} s = r^U_{U_\alpha} t$ für alle α, so ist $s_\iota | U_\alpha \cap U_\iota = t_\iota | U_\alpha \cap U_\iota$ für alle ι und α, also $s_\iota | U \cap U_\iota = t_\iota | U \cap U_\iota$ für alle ι. Damit ist aber $s = t$.

Beweis zu b): Ist $s_\alpha = (s_\iota^{(\alpha)})_{\iota \in I} \in \mathcal{Q}(U_\alpha)$ und $r^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta} s_\alpha = r^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta} s_\beta$ für alle α, β, so ist $s_\iota^{(\alpha)} | U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\iota = s_\iota^{(\beta)} | U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\iota$ für alle α, β, ι. Setzt man $s_\iota | U_\alpha \cap U_\iota := s_\iota^{(\alpha)}$, so wird damit ein Element $s_\iota \in \Gamma(U \cap U_\iota, \mathcal{Q}_\iota)$ definiert. Wegen $(\varrho_{\varkappa\iota} \circ s_\iota) | U_\alpha \cap U_\iota \cap U_\varkappa = s_\iota^{(\alpha)} | U_\alpha \cap U_\iota \cap U_\varkappa =$

$= s_\varkappa^{(\alpha)} | U_\alpha \cap U_\iota \cap U_\varkappa = s_\varkappa | U_\alpha \cap U_\iota \cap U_\varkappa$ ist $s = (s_\iota)_{\iota \in I} \in \mathcal{Q}(U)$.

Außerdem ist $r^U_{U_\alpha} s = (s_\iota | U_\alpha \cap U_\iota)_{\iota \in I} = (s_\iota^{(\alpha)})_{\iota \in I} = s_\alpha$.

2) Zum Nachweis der ersten Behauptung genügt es zu zeigen, daß zu jedem $\iota \in I$ ein Isomorphismus $\theta_\iota : \mathcal{Q}_X | U_\iota \to \mathcal{Q}_\iota$ existiert, so daß $\theta_\iota \circ \theta_\varkappa^{-1} = \varrho_{\iota\varkappa}$ ist. Man erhält dann einen differenzierbaren Atlas für D(X). Für eine offene Menge $U \subset U_\iota$ sei $\theta_\iota^U : \Gamma(U, \mathcal{Q}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{Q}_\iota)$ definiert durch $\theta_\iota^U((s_\varkappa)_{\varkappa \in I}) := s_\iota$.

a) Ist $s_\iota = 0$, so ist $s_\varkappa = \varrho_{\varkappa\iota} \circ s_\iota = 0$ für alle $\varkappa$, also $(s_\varkappa)_{\varkappa \in I} = 0$. Damit ist θ_ι^U injektiv.

b) Ist $t \in \Gamma(U, \mathcal{Q}_\iota)$, so setze man $s_\varkappa := \varrho_{\varkappa\iota} \circ t \in \Gamma(U \cap U_\varkappa, \mathcal{Q}_\varkappa)$ und $s := (s_\varkappa)_{\varkappa \in I}$. Wegen $\varrho_{\varkappa\lambda} \circ s_\lambda = \varrho_{\varkappa\lambda} \circ \varrho_{\lambda\iota} \circ t = \varrho_{\varkappa\iota} \circ t = s_\varkappa$ ist $s \in \Gamma(U, \mathcal{Q}_X)$, und es gilt: $\theta_\iota^U(s) = s_\iota = \varrho_{\iota\iota} \circ t = t$. Damit ist θ_ι^U surjektiv.

c) Es ist $\theta_\iota^V \circ r_V^U((s_\varkappa)_{\varkappa \in I}) = \theta_\iota^V((s_\varkappa | V \cap U_\varkappa)_{\varkappa \in I}) = s_\iota | V \cap U_\iota = \theta_\iota^U((s_\varkappa)_{\varkappa \in I}) | V \cap U_\iota$.

Also wird durch $\theta_\iota(((s_\varkappa)_{\varkappa \in I})_X) := (s_\iota)_{\mathfrak{x}}$ ein Garbenhomomorphismus

$\theta_\iota : \mathcal{O}_X|U_\iota \to \mathcal{O}_\iota$ definiert. wegen a) und b) ist θ_ι ein Isomorphismus. Offensichtlich ist $\varphi_{\iota\varkappa} \circ \theta_\varkappa = \theta_\iota$. ▼

I.1.3. Satz: a) Ist (U, φ, B) eine komplexe Karte für X, so ist $(U, \mathcal{O}_X|U) \cong D_B((U, \mathcal{H}_X|U))$.

b) Es gibt einen kanonischen Garbenhomomorphismus $j_X : \mathcal{H}_X \to \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$. Ist X reduziert, so ist j_X injektiv.

c) Ist $\Phi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, so gibt es genau eine differenzierbare Abbildung $D(\Phi) : D(X) \to D(Y)$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_Y \circ \widetilde{\Phi} & \xrightarrow{\quad\widehat{\Phi}\quad} & \mathcal{H}_X \\ \downarrow j_Y \circ \widetilde{\Phi} & & \downarrow j_X \\ (\mathcal{O}_Y \circ \widetilde{\Phi}) \bullet (\mathcal{O}_Y \circ \widetilde{\Phi}) & \xrightarrow{D(\widehat{\Phi}) \bullet D(\widehat{\Phi})} & \mathcal{O}_X \bullet \mathcal{O}_X \end{array}$$

Insbesondere gilt:

α) $D(\Psi) \circ D(\Phi) = D(\Psi \circ \Phi)$

β) $D(id_X) = id_{D(X)}$

D ist also ein kovarianter Funktor von der Kategorie der komplexen Räume in die Kategorie der differenzierbaren Räume.

Der Beweis ergibt sich mehr oder weniger trivial aus den vorangegangenen Sätzen.

I.1.4. Definition: Sei $X = (\underline{X}, \mathcal{H}_X)$ ein komplexer Raum.

a) Sei $U \subset \underline{X}$ offen. Unter einer differenzierbaren Funktion auf U verstehen wir ein Element $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Für $x \in U$ bezeichne s_x das Bild von x unter s in $\mathcal{O}_{X,x}$ und s(x) die reelle Zahl $[s_x] \in \mathcal{O}_{X,x}/m(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathbb{R}$.

b) Sei $i : X' \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung, $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Dann nennt man $s|X' := \widehat{D(i)} \circ (s \circ \widetilde{i}) \in \Gamma(\widetilde{i}^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$ die Einschränkung von s auf X'.

I.1.5. Definition: Sei $X = (\underline{X}, \mathcal{H}_X)$ ein komplexer Raum, $U \subset \underline{X}$ offen. Eine stetige Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls es zu jedem $x \in U$ eine komplexe Karte (V, φ, B) für X mit $x \in V \subset U$ und eine differenzierbare Funktion $G : B \to \mathbb{R}$ mit $g|V = G \circ \widetilde{\varphi}$ gibt. Die Menge der differenzierbaren stetigen Funktionen auf U werde mit $C^\infty(U, \mathbb{R})$ bezeichnet.

I.1.6. Satz: Sei X ein komplexer Raum. Durch $v(s)(x) := s(x)$ wird für jede offene Teilmenge $U \subset \underline{X}$ ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren $v : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$ definiert, der mit Restriktionen verträglich ist. (Wie sich später zeigen wird, ist v stets surjektiv, i.a. aber nicht injektiv). Ist X ein normaler komplexer Raum, so ist v ein Isomorphismus.

Beweis: 1) Für $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist v(s) eine reellwertige Funktion auf U. Sei $x_0 \in U$, (V, φ, B) eine komplexe Karte mit $x_0 \in V \subset U$. O.B.d.A. kann man annehmen, daß es ein $g \in \Gamma(B, \mathcal{O}_B)$ mit $g_x \bmod \mathcal{F}_x = s_x$ für alle $x \in U$ gibt (wenn man U als

Teilmenge von B auffaßt und φ durch die kohärente Idealgarbe $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_B$ definiert wird). Dann ist $v(s) = g \circ \widetilde{\varphi}$ auf V, also $v(s) \in C^\infty(U,\mathbb{R})$. Offensichtlich ist v ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren und verträglich mit Restriktionen.

2) Sei X normal, $\mathcal{C}^\infty_X$ die Garbe der Keime von differenzierbaren stetigen Funktionen auf X. Es ist klar, daß $\Gamma(U, \mathcal{C}^\infty_X) = C^\infty(U,\mathbb{R})$ für alle offenen Teilmengen $U \subset \underline{X}$ ist. Es genügt daher zu zeigen, daß $\mathcal{C}^\infty_X \cong \mathcal{D}_X$ ist. Das ist ein lokales Problem: Sei $B = B(0) \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung, $A \subset B$ eine lokal-irreduzible analytische Menge mit $0 \in A$. $\mathcal{F}$ sei die Idealgarbe von A in B. Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}_B$ die Garbe der Keime von differenzierbaren Funktionen, die auf A verschwinden. Es ist $\mathcal{C}^\infty_{A,0} = \mathcal{A}_{B,0}/\mathcal{K}_0$, und daher genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{K}_0 = \widetilde{\mathcal{F}}_0$ ist.

Sei $I_0(A)$ das Ideal der Keime von reellanalytischen Funktionen, die auf A verschwinden. Ist $\mathcal{F}_0 = (f_1,\ldots,f_q)$, so ist $I_0(A) = (\mathrm{Re}\, f_1,\ldots,\mathrm{Im}\, f_q)$, da A lokal irreduzibel ist (vgl. dazu [4]). Da A in 0 als reellanalytische Menge kohärent ist, gilt andererseits: $\mathcal{K}_0 = I_0(A) \cdot \mathcal{A}_{B,0}$ (vgl. [11]). Wegen $I_0(A) \cdot \mathcal{A}_{B,0} = \widetilde{\mathcal{F}}_0$ ist alles bewiesen. ▼

I.1.7.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $U \subset \underline{X}$ offen und $s \in \Gamma(U, \mathcal{D}_X)$. Außerdem sei $M \subset \mathbb{R}$ offen und $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $s(x) \in M$ für alle $x \in U$, so gibt es ein Element $f \circ s \in \Gamma(U, \mathcal{D}_X)$ mit $v(f \circ s) = f \circ v(s)$.

Beweis: Sei $x_0 \in U$. Es gibt eine komplexe Karte (V, φ, B) für X mit $x_0 \in V \subset U$ und eine differenzierbare Funktion $h \in \Gamma(B, \mathcal{A}_B)$ mit $h|V = s|V$.

Man definiert: $(f \circ s)_{x_0} := (f \circ h|V)_{x_0}$.

Es muß gezeigt werden, daß diese Definition nicht von der Wahl der komplexen Karte und auch nicht von der Wahl des Repräsentanten h abhängt.

a) Sei k ein weiterer Repräsentant von s. Wird φ durch die kohärente Idealgarbe $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_B$ definiert und wird $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{A}_B$ durch Funktionen $g_1,\ldots,g_p$ erzeugt, so ist $k = h + \sum_{\varrho=1}^{p} a_\varrho g_\varrho$ mit differenzierbaren Funktionen a_ϱ in der Nähe von $\widetilde{\varphi}(x_0)$ - und damit o.B.d.A. auf B.

Nun seien offene Intervalle $I_1 = I_1(h(\widetilde{\varphi}(x_0)))$, $I_2 = I_2(0)$ so gewählt, daß f_1 mit $f_1(x,y) := f(x + y)$ noch auf $I_1 \times I_2$ definiert ist. Es gibt eine differenzierbare Funktion $g : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, so daß $f(x + y) = f(x) + y \cdot g(x,y)$ auf $I_1 \times I_2$ ist.

Daraus folgt: $f \circ k(z) = f(h(z) + \sum_{\varrho=1}^{p} a_\varrho(z) g_\varrho(z)) = f \circ h(z) +$

$$+ \sum_{\varrho=1}^{p} \Big[a_\varrho(z) \cdot g(h(z), \sum_{\sigma=1}^{p} a_\sigma(z) g_\sigma(z)) \Big] g_\varrho(z), \text{ also } (f \circ k)|V = (f \circ h)|V.$$

b) Sei nun $\psi : V \hookrightarrow B'$ eine andere komplexe Karte für X. Dann gibt es (eventuell nach Verkleinerung der Bereiche B,B') eine holomorphe Abbildung

$\Phi : B \to B'$ mit $\psi = \Phi \circ \varphi$. Sei h ein Repräsentant für s bezüglich ψ. Dann ist $h \circ \Phi$ ein Repräsentant für s bezüglich φ, denn es ist $\widehat{h \circ \Phi}|V =$
$= D(\widehat{\varphi}) \circ ((h \circ \Phi) \square \widetilde{\varphi}) = D(\widehat{\varphi}) \circ \left[(D(\widehat{\Phi}) \circ (h \square \widetilde{\Phi})) \square \widetilde{\varphi} \right] = \widehat{D(\Phi) \circ D(\varphi)} \circ (h \square (\widetilde{\Phi} \circ \widetilde{\varphi})) =$
$= D(\widehat{\psi}) \circ (h \square \widetilde{\psi}) = h|V.$
Wegen $f \circ (h \circ \Phi) = (f \circ h) \circ \Phi$ ist $f \circ (h \circ \Phi)|V = f \circ h|V$. ▼

Beispiele:

1) Ist $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und $s(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, so gibt es ein Element $s^{-1} \in \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $s \cdot s^{-1} = 1$.
2) Ist $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, so gibt es ein Element $\exp(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $\exp(s)(x) = e^{s(x)}$ für $x \in U$.
   Insbesondere gilt: $\exp(s + t) = \exp(s) \cdot \exp(t)$.

I.1.8.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $s \in \Gamma(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$. Dann versteht man unter dem Träger von s die Menge $Tr(s) := \overline{\{x \in \underline{X} : s_x \neq 0_x\}}$.

I.1.9.Satz: Sei X ein (parakompakter) komplexer Raum, $\mathfrak{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung von $\underline{X}$. Dann gibt es zu $\mathfrak{U}$ eine passende Teilung der Eins, d.h. ein System $(e_\iota)_{\iota \in I}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $e_\iota \in \Gamma(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$ für alle $\iota \in I$.
b) $e_\iota(x) \geq 0$ für alle $\iota \in I$, $x \in \underline{X}$.
c) $Tr(e_\iota) \subset U_\iota$ für alle $\iota \in I$.
d) $\sum_{\iota \in I} e_\iota = 1$.

Beweis: Zunächst kann man für jedes $\iota \in I$ offene Mengen U'_ι, U''_ι finden, so daß $U'_\iota \subset\subset U''_\iota \subset\subset U$ und $\bigcup_{\iota \in I} U'_\iota = \underline{X}$ ist. Zu jedem $x \in \underline{X}$ gibt es nun eine offene Umgebung V_x, so daß $V_x \cap U'_\iota \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $\iota \in I$ ist. Wählt man $V'_x \subset V_x$ genügend klein, so ist $V'_x \subset U'_\iota$ für alle (endlich vielen) $\iota \in I$ mit $V'_x \cap U'_\iota \neq \emptyset$ und $V'_x \subset U''_\iota$ für alle $\iota \in I$ mit $V'_x \cap \overline{U}'_\iota \neq \emptyset$, und es gibt eine abgeschlossene Einbettung $V'_x \hookrightarrow B_x$ in einen Bereich im $\mathbb{C}^n$. Das ergibt eine offene Überdeckung von $\underline{X}$, zu der eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathfrak{V} = (V_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ existiert. Es gilt für alle $\varkappa \in K$:

1) $V_\varkappa \cap U'_\iota \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $\iota \in I$.
2) Ist $V_\varkappa \cap \overline{U}'_\iota \neq \emptyset$, so ist $V_\varkappa \subset U''_\iota$.
3) Es gibt eine abgeschlossene Einbettung $\varphi_\varkappa : V_\varkappa \hookrightarrow B_\varkappa$ in einen Bereich im $\mathbb{C}^n$.

Für $\iota \in I$ sei $K_\iota = \{\varkappa \in K : V_\varkappa \cap \overline{U}'_\iota \neq \emptyset\}$. K_ι ist endlich, da $\mathfrak{V}$ lokal-endlich und $\overline{U}'_\iota$ kompakt ist. Es sei $\mathfrak{W} = (W_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ eine offene Überdeckung von $\underline{X}$ mit $W_\varkappa \subset\subset V_\varkappa$, und es sei $B^*_\varkappa \subset\subset B_\varkappa$ ein Bereich mit $\widetilde{\varphi}_\varkappa(W_\varkappa) = B^*_\varkappa \cap \widetilde{\varphi}_\varkappa(V_\varkappa)$. Es gibt eine differenzierbare Funktion $f_\varkappa \geq 0$ auf $B_\varkappa$ mit $f_\varkappa \mid B^*_\varkappa \equiv 1$ und

$\mathrm{Tr}(f_\varkappa) \subset\subset B_\varkappa$. Durch $s_\varkappa \mid V_\varkappa := f_\varkappa \circ D(\varphi_\varkappa)$ und $(s_\varkappa)_x := 0_x$ für $x \in \underline{X} - V_\varkappa$ wird ein Element $s_\varkappa \in \Gamma(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$ definiert.

Sei $e_\iota^* := \sum_{\varkappa \in K_\iota} s_\varkappa \in \Gamma(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$. Dann gilt:

1) $\mathrm{Tr}(e_\iota^*) \subset U_\iota$: Ist $x_0 \in \mathrm{Tr}(e_\iota^*)$, so gibt es eine Folge $x_\nu \in \underline{X}$ mit $x_\nu \to x_0$ und $(e_\iota^*)_{x_\nu} \neq 0_{x_\nu}$ für alle ν. Zu jedem ν existiert ein $\varkappa \in K_\iota$ mit $(s_\varkappa)_{x_\nu} \neq 0_{x_\nu}$, also $x_\nu \in V_\varkappa \subset U_\iota''$. Dann ist aber $x_0 \in \overline{U_\iota''} \subset U_\iota$.

2) $\sum_{\iota \in I} e_\iota^*(x) > 0$ für alle $x \in \underline{X}$: Es ist nämlich $\sum_{\iota \in I} e_\iota^*(x) = \sum_{\iota \in I} \sum_{\varkappa \in K_\iota} s_\varkappa(x) = \sum_{\varkappa \in K} s_\varkappa(x)$, mit $s_\varkappa(x) \geq 0$ für alle $\varkappa$ und x und $s_\varkappa(x) > 0$ auf $W_\varkappa$. Wegen $\bigcup_{\varkappa \in K} W_\varkappa = \underline{X}$ folgt die Behauptung.

Sei $e_\iota := e_\iota^* \cdot (\sum_{\varsigma \in I} e_\varsigma^*)^{-1} \in \Gamma(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$. Offensichtlich ist $e_\iota(x) \geq 0$ überall, $\mathrm{Tr}(e_\iota) \subset U_\iota$ und $\sum_{\iota \in I} e_\iota = 1$. ▼

I.1.10.Folgerung: Die in Satz I.1.6. definierte Abbildung $v : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$ ist surjektiv.

Beweis: Sei $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ vorgegeben. Man wähle eine lokal-endliche offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von U, so daß es abgeschlossene Einbettungen $\varphi_\iota : U_\iota \hookrightarrow B_\iota$ und differenzierbare Funktionen f_ι auf B_ι mit $f \mid U_\iota = f_\iota \circ \widetilde{\varphi}_\iota$ gibt.
Dann ist $s_\iota := f_\iota \circ D(\varphi_\iota) \in \Gamma(U_\iota, \mathcal{O}_X)$. Sei $(e_\iota)_{\iota \in I}$ eine passende Teilung der Eins, $s := \sum_{\iota \in I} e_\iota s_\iota \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Es gilt: $v(s)(x) = \sum_{\iota \in I} e_\iota(x) \cdot s_\iota(x) = \sum_{\iota \in I} e_\iota(x) f_\iota(\widetilde{\varphi}_\iota(x)) = f(x) \cdot (\sum_{\iota \in I} e_\iota)(x) = f(x)$. ▼

I.1.11.Folgerung: Sei X ein komplexer Raum, $i : X' \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum. Ist $s' \in \Gamma(\underline{X}', \mathcal{O}_{X'})$, so gibt es ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $s \mid X' = s'$.

Beweis: Es ist klar, daß lokale Fortsetzungen existieren, die man mit Hilfe einer Teilung der Eins zu einer globalen Fortsetzung zusammensetzen kann.

Es folgen noch einige Bemerkungen über "komplexwertige differenzierbare Funktionen":

I.1.12.Definition: X,Y seien komplexe Räume. Unter einer differenzierbaren Abbildung zwischen X und Y versteht man eine differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Räumen D(X) und D(Y). Die Menge dieser Abbildungen sei mit D(X,Y) bezeichnet. Ein Element von $D(X, \mathbb{C})$ heißt auch komplexwertige differenzierbare Funktion auf X.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß es eine kanonische Bijektion
$\Psi : D(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\approx} \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \times \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ gibt (vgl. etwa [14]).

Es ist $\mathrm{Re}\circ F = \mathrm{pr}_1 \circ \Psi(F)$ und $\mathrm{Im}\circ F = \mathrm{pr}_2 \circ \Psi(F)$ für $F \in D(X,\mathbb{C})$. Versieht man $D(X,\mathbb{C})$ mittels Ψ mit der Struktur einer $\mathbb{C}$-Algebra, so ist $F = (\mathrm{Re}\circ F) + i(\mathrm{Im}\circ F)$. Ist $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die durch $z \mapsto \bar{z}$ gegebene differenzierbare Abbildung, so gilt: $c\circ(g + ih) = g + i(-h)$.

I.1.13.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $j : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ die kanonische Injektion (aufgefaßt als differenzierbare Abbildung). Ist $F \in D(X,\mathbb{C})$ mit $c\circ F = F$, so gibt es eine differenzierbare Abbildung $f : D(X) \to \mathbb{R}$ mit $F = j\circ f$.

Beweis: Es ist $j\circ\mathrm{Re} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + c)$. Sei $f := \mathrm{Re}\circ F$. Dann ist f eine differenzierbare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$, und es gilt: $j\circ f = j\circ\mathrm{Re}\circ F = \frac{1}{2}(\mathrm{id}\circ F + c\circ F) = \frac{1}{2}(F + F) = F$. ▼

Man schreibt auch $\bar{F} := c\circ F$. Der Satz besagt: Ist $F = \bar{F}$, so ist F reellwertig.

§ 2 Tangentialräume und Differentialformen

Dieser Paragraph dient im Wesentlichen zur Festlegung von Notationen.

I.2.1.Definition: Sei $\varphi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen. Sei $V \subset \underline{Y}$ offen, $U := \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subset \underline{X}$. Ist $s \in \Gamma(V,\mathcal{O}_Y)$, so definiert man $s\circ\varphi \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ durch

$$s\circ\varphi := \widehat{D(\varphi)}\circ(s \square \tilde{\varphi})$$

Bemerkung: Für $x \in U$ ist $(s\circ\varphi)_x = \widehat{D(\varphi)}_x(s_{\tilde{\varphi}(x)})$. Die Definition steht in Einklang mit Definition I.1.4.

I.2.2.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$. Dann heißt $T_{X,x} := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{X,x}, \mathbb{C})$ der Tangentialraum an X im Punkte x.

I.2.3.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\theta_x : T_{X,x} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x}, \mathbb{C})$$

Beweis: θ_x sei definiert durch $\theta_x(\xi)(\overline{g} \bmod \mathfrak{m}^2_{X,x}) := \xi(g)$. ▼

Bemerkung: Bekanntlich nennt man $\mathrm{eib}_x X := \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x})$ die Einbettungs-

dimension von X in x. $\mathrm{eib}_x X$ ist die kleinste natürliche Zahl n, zu der es eine offene Umgebung $U(x) \subset \underline{X}$ und eine abgeschlossene Einbettung $\varphi : U \hookrightarrow B$ in einen Bereich des $\mathbb{C}^n$ gibt. $T^*_{X,x} := \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x}$ nennt man auch den Cotangentialraum von X in x.

I.2.4.Definition: X,Y seien komplexe Räume, $\Phi = (\widetilde{\Phi}, \widehat{\Phi}) : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung. Es sei $x \in \underline{X}$, $y = \widetilde{\Phi}(x) \in \underline{Y}$. Die induzierte (lineare) Abbildung der Tangentialräume $T_x(\Phi) : T_{X,x} \to T_{Y,y}$ wird definiert durch

$$T_x(\Phi)(\xi)(G) := \xi(\widehat{\Phi}_x(G)).$$

Bemerkungen: Es ist $T_x(\Psi \circ \Phi) = T_{\widetilde{\Phi}(x)}(\Psi) \circ T_x(\Phi)$ und $T_x(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T_{X,x}}$.
Ist $\iota : X \hookrightarrow Y$ eine Einbettung, so ist $T_x(\iota) : T_{X,x} \to T_{Y,\widetilde{\iota}(x)}$ injektiv.
Insbesondere gilt: Ist (U, φ, B) eine komplexe Karte für X mit $x \in U$, und ist $\mathcal{F}$ die kohärente Idealgarbe in $\mathcal{H}_B$, die φ definiert, so ist

$$T_x(\varphi)(T_{X,x}) = \{\delta \in T_{B,\widetilde{\varphi}(x)} : \delta(f) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F}_{\widetilde{\varphi}(x)}\}.$$

Ist sogar $\dim_{\mathbb{C}} B = \mathrm{eib}_x X$, so ist $\delta(f) = 0$ für alle $\delta \in T_{B,\widetilde{\varphi}(x)}$, $f \in \mathcal{F}_{\widetilde{\varphi}(x)}$.

I.2.5.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$. Eine komplexe Karte (U, φ, B) für X mit $x \in U$ heißt spezielle komplexe Karte für X in x, falls $\widetilde{\varphi}(x) = 0$ und $\dim_{\mathbb{C}} B = \mathrm{eib}_x X$ ist.

Bemerkung: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$, (U, φ, B) eine spezielle komplexe Karte für X in x. Es sei $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ vermöge des kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Hol}(U, \mathbb{C}^n) = \Gamma(U, \mathcal{H}_X)^n$, und es sei $j_X \circ z_\nu = (x_\nu, y_\nu) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = D(U, \mathbb{C})$.
Dann ist $\{(\frac{\partial}{\partial z_1})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial z_n})_x\}$ mit $(\frac{\partial}{\partial z_\nu})_x(\hat{\varphi}(f_0)) := \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(0)$ eine Basis von $T_{X,x}$.
Ein Element $\xi \in T_{X,x}$ schreibt sich in der Form $\xi = \sum_{\nu=1}^{n} \xi((z_\nu)_x)(\frac{\partial}{\partial z_\nu})_x$.

I.2.6.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$. Dann nennt man $T^r_{X,x} := \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathbb{R})$ den reellen Tangentialraum von X in x.
Für $\xi \in T^r_{X,x}$ und $f = (g,h) \in \mathcal{O}^c_{X,x} := \mathcal{O}_{X,x} \bullet \mathcal{O}_{X,x}$ definiert man $\xi(f) := \xi(g) + i\,\xi(h) \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Ist (U, φ, B) wie oben eine spezielle komplexe Karte für X in x, so wird durch $(\frac{\partial}{\partial x_\nu})_x(D\widehat{\varphi}(h_0)) := \frac{\partial h}{\partial x_\nu}(0)$ und $(\frac{\partial}{\partial y_\nu})_x(D\widehat{\varphi}(h_0)) := \frac{\partial h}{\partial y_\nu}(0)$ eine reelle Basis $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_x, (\frac{\partial}{\partial y_1})_x, \ldots, (\frac{\partial}{\partial y_n})_x\}$ von $T^r_{X,x}$ definiert.
Ein Element $\xi \in T^r_{X,x}$ schreibt sich in der Form

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{n} \xi((x_\nu)_x)(\frac{\partial}{\partial x_\nu})_x + \sum_{\nu=1}^{n} \xi((y_\nu)_x)(\frac{\partial}{\partial y_\nu})_x.$$

I.2.7.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$. Zu jedem $\xi \in T_{X,x}$ gibt es genau ein $\eta \in T^r_{X,x}$ mit $\xi(\sigma) = \eta(j_X(\sigma))$ für $\sigma \in \mathcal{H}_{X,x}$.

Beweis: Sei (U,φ,B) eine spezielle komplexe Karte für X in x, $\xi \in T_{X,x}$ vorgegeben, $c_\nu := \xi((z_\nu)_x)$ für $\nu = 1,\dots,n$. Dann ist $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$ und $\eta := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (\frac{\partial}{\partial x_\nu})_x + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (\frac{\partial}{\partial y_\nu})_x \in T^r_{X,x}$. η ist durch ξ eindeutig bestimmt (es ist $c_\nu = \eta(j_X((z_\nu)_x))$), und es gilt für $\sigma = \hat{\varphi}(f_0) \in \mathcal{H}_{X,x}$: $\eta(j_X(\sigma)) =$

$= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(0) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu}(0) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(0) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (\frac{\partial}{\partial z_\nu})_x(\sigma) = \xi(\sigma)$. ▼

$T_{X,x}$ und $T^r_{X,x}$ sind daher kanonisch isomorph und können miteinander identifiziert werden.

I.2.8.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $x \in \underline{X}$. Unter dem Raum der 1-dimensionalen komplexwertigen Differentialformen auf X in x versteht man den $\mathbb{C}$-Vektorraum $A^1_{X,x} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T^r_{X,x}, \mathbb{C})$.
Für $\omega \in A^1_{X,x}$ sei $\overline{\omega} \in A^1_{X,x}$ definiert durch $\overline{\omega}(\xi) := \overline{\omega(\xi)}$.
Für $f \in \mathcal{D}^c_{X,x}$ sei das totale Differential $(df)_x \in A^1_{X,x}$ definiert durch $(df)_x(\xi) := \xi(f)$.

Bemerkungen: Offensichtlich ist $(T^r_{X,x})^* = \{\omega \in A^1_{X,x} : \omega = \overline{\omega}\}$.
Ist (U,φ,B) eine spezielle komplexe Karte für X in x, so definiert man:
$(dz_i)_x := (dj_X((z_i)_x))_x$, $(d\overline{z}_i)_x := \overline{(dz_i)_x}$.
$\{(dz_1)_x,\dots,(dz_n)_x,(d\overline{z}_1)_x,\dots,(d\overline{z}_n)_x\}$ ist eine Basis von $A^1_{X,x}$ über $\mathbb{R}$.

I.2.9.Definition: Ein Element $\omega \in A^1_{X,x}$ ist vom Typ (1,0), falls $\omega(c\,\xi) = c\cdot\omega(\xi)$ für $c \in \mathbb{C}$, $\xi \in T^r_{X,x}$ ist, und vom Typ (0,1), falls $\omega(c\cdot\xi) = \overline{c}\cdot\omega(\xi)$ für $c \in \mathbb{C}$, $\xi \in T^r_{X,x}$ ist.

Wie üblich kann man zeigen: Jedes $\omega \in A^1_{X,x}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $\omega = \omega^{(1,0)} + \omega^{(0,1)}$ in eine Form vom Typ (1,0) und eine vom Typ (0,1).

I.2.10.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $U \subset \underline{X}$ offen, $f \in D(U,\mathbb{C})$. Für $x \in U$ definiert man die Form $(d'f)_x$ vom Typ (1,0) und die Form $(d''f)_x$ vom Typ (0,1) durch $(df)_x = (d'f)_x + (d''f)_x$.

Bemerkungen: 1) Wegen $T^r_{X,x} = T_{X,x}$ ist $(d'f)_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{X,x}, \mathbb{C})$.

2) Sei $s \in \Gamma(U,\mathcal{D}_X)$, (V,φ,B) eine komplexe Karte für X mit $x \in V$ und $f \in \Gamma(B,\mathcal{A}_B)$ mit $s|V = f|V$. Dann gilt: $(d's)_x(\xi) = (d'f)_{\tilde{\varphi}(x)}(T_x(\varphi)(\xi)) =$

$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu}(\tilde{\varphi}(x))\,\xi_\nu$ für $\xi \in T_{X,x}$ mit $T_x(\varphi)(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$.

Für spätere Anwendungen sei noch folgendes Resultat notiert:

I.2.11.Satz: Seien X,Y komplexe Räume, $\Phi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung, $x \in \underline{X}$, $y = \widetilde{\Phi}(x) \in \underline{Y}$. Sei $V \subset \underline{Y}$ offen, $U = \widetilde{\Phi}^{-1}(V) \subset \underline{X}$ mit $x \in U$. Außerdem seien $s, s' \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$. Dann gilt für $\xi \in T_{Y,y}$ und $\eta \in T_{X,x}$:

a) $(d'(s \cdot s'))_y(\xi) = s(y) \cdot (d's')_y(\xi) + s'(y) \cdot (d's)_y(\xi)$.

b) $(d'(\exp(s)))_y(\xi) = e^{s(y)} \cdot (d's)_y(\xi)$.

c) $(d'(s \circ \Phi))_x(\eta) = (d's)_y(T_x(\Phi)(\eta))$.

Der Beweis ist trivial.

§ 3 Die Levi-Form

I.3.1.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $U \subset \underline{X}$ offen, $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Es sei $x \in U$, (V, φ, B) eine komplexe Karte für X mit $x \in V$ und $f \in \Gamma(B, \mathcal{O}_B)$ mit $f|V = s|V$. Für $\xi \in T_{X,x}$ sei $T_x(\varphi)(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^{(\varphi)} \frac{\partial}{\partial z_\nu}$.

Dann wird durch $\mathrm{Lev}_x(s)(\xi,\eta) := \sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x))\, \xi_\nu^{(\varphi)} \bar{\eta}_\mu^{(\varphi)}$

eine hermitesche Form $\mathrm{Lev}_x(s) : T_{X,x} \times T_{X,x} \to \mathbb{C}$ definiert.

Beweis: Es ist die Unabhängigkeit von der Wahl des Repräsentanten und der komplexen Karte zu zeigen.

a) Sei $g \in \Gamma(B, \mathcal{O}_B)$ mit $g|V = s|V$. Wird φ durch die Idealgarbe $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_q) \subset \mathcal{H}_B$ definiert, so ist $g = f + \sum_{\lambda=1}^{q} c_\lambda f_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{q} \bar{c}_\lambda \bar{f}_\lambda$ in der Nähe von $\widetilde{\varphi}(x)$, mit gewissen differenzierbaren Funktionen c_λ.

Für $\xi \in T_{X,x}$ ist $\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^{(\varphi)} \frac{\partial}{\partial z_\nu}(f_\lambda) = 0$ für $\lambda = 1, \ldots, q$. Daraus folgt:

$$\sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 g}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x))\, \xi_\nu^{(\varphi)} \bar{\eta}_\mu^{(\varphi)} = \sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x))\, \xi_\nu^{(\varphi)} \bar{\eta}_\mu^{(\varphi)} +$$

$$+ \sum_{\nu,\mu} \Big[\sum_{\lambda=1}^{q} \Big(\frac{\partial c_\lambda}{\partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x)) \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_\nu}(\widetilde{\varphi}(x)) + \frac{\partial \bar{c}_\lambda}{\partial z_\nu}(\widetilde{\varphi}(x)) \frac{\partial \bar{f}_\lambda}{\partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x)) \Big) \Big] \xi_\nu^{(\varphi)} \bar{\eta}_\mu^{(\varphi)} =$$

$$= \sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x))\, \xi_\nu^{(\varphi)} \bar{\eta}_\mu^{(\varphi)} + \sum_{\mu,\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial \bar{z}_\mu}(\widetilde{\varphi}(x)) \cdot \Big(\sum_{\nu} \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_\nu}(\widetilde{\varphi}(x))\, \xi_\nu^{(\varphi)} \Big) \bar{\eta}_\mu^{(\varphi)} +$$

$$+ \sum_{\nu,\lambda} \frac{\partial \bar{c}_\lambda}{\partial z_\nu}(\widetilde{\varphi}(x)) \Big(\overline{\sum_{\mu} \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_\mu}(\widetilde{\varphi}(x)) \cdot \eta_\mu^{(\varphi)}} \Big) \xi_\nu^{(\varphi)}, \text{ wobei die beiden letzten Terme}$$

verschwinden.

b) Sei (V,ψ,B') eine weitere komplexe Karte für X, $\Phi : B \to B'$ eine holomorphe Abbildung mit $\psi = \Phi \circ \varphi$. Ist f ein Repräsentant für s bzgl. ψ, so ist $f \circ \Phi$ ein Repräsentant für s bzgl. φ.

Seien $z_1,\dots,z_n$ Koordinaten für B und $w_1,\dots,w_m$ Koordinaten für B'. Dann gilt für $\xi \in T_{X,x}$:

$$\sum_{\mu=1}^{m} \xi^{(\psi)}_{\mu} \frac{\partial}{\partial w_\mu} = T_x(\psi)(\xi) = T_{\tilde\varphi(x)}(\Phi)(T_x(\varphi)(\xi)) = T_{\tilde\varphi(x)}(\Phi)\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(\varphi)}_{\nu} \frac{\partial}{\partial z_\nu}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(\varphi)}_{\nu} \Big(\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial z_\nu}(\tilde\varphi(x)) \frac{\partial}{\partial w_\mu}\Big) = \sum_{\mu=1}^{m} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(\varphi)}_{\nu} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial z_\nu}(\tilde\varphi(x))\Big) \frac{\partial}{\partial w_\mu},$$

wenn $\Phi = (\Phi_1,\dots,\Phi_m)$ ist.

Außerdem ist $\dfrac{\partial^2 (f\circ\Phi)}{\partial z_\nu \partial \bar z_\mu}(\tilde\varphi(x)) = \sum_{\lambda,\varkappa} \dfrac{\partial^2 f}{\partial w_\lambda \partial \bar w_\varkappa}(\tilde\psi(x)) \cdot \dfrac{\partial \Phi_\lambda}{\partial z_\nu}(\tilde\varphi(x)) \overline{\dfrac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial z_\mu}(\tilde\varphi(x))}$.

Damit erhält man:

$$\sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 (f\circ\Phi)}{\partial z_\nu \partial \bar z_\mu}(\tilde\varphi(x))\, \xi^{(\varphi)}_{\nu} \bar\eta^{(\varphi)}_{\mu} = \sum_{\lambda,\varkappa} \frac{\partial^2 f}{\partial w_\lambda \partial \bar w_\varkappa}(\tilde\psi(x)) \Big(\sum_{\nu} \xi^{(\varphi)}_{\nu} \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial z_\nu}(\tilde\varphi(x))\Big) \overline{\Big(\sum_{\mu} \eta^{(\varphi)}_{\mu} \frac{\partial \Phi_\varkappa}{\partial z_\mu}(\tilde\varphi(x)}$$

$$= \sum_{\lambda,\varkappa} \frac{\partial^2 f}{\partial w_\lambda \partial \bar w_\varkappa}(\tilde\psi(x))\, \xi^{(\psi)}_{\lambda} \bar\eta^{(\psi)}_{\varkappa}. \blacktriangledown$$

I.3.2.Definition: $\mathrm{Lev}_x(s)$ heißt die Leviform von s im Punkte x.
s heißt in x q-konvex (mit $1 \le q \le \mathrm{eib}_x X + 1$), wenn $\mathrm{Lev}_x(s)$ höchstens q-1 nicht-positive Eigenwerte besitzt (also mindestens $\mathrm{eib}_x X - q + 1$ positive Eigenwerte). Ist s in x 1-konvex, so nennt man s auch streng pseudokonvex oder streng plurisubharmonisch in x.

Bemerkung: Ist s in x q-konvex, so ist s in x auch (q+1)-konvex. Insbesondere ist s in x stets $(\mathrm{eib}_x X + 1)$-konvex. Wir sagen deshalb, daß s auch p-konvex in x für jedes $p > \mathrm{eib}_x X + 1$ ist.

I.3.3.Lemma: Sei E ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $Q : E \times E \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form. Q hat genau dann mindestens p positive Eigenwerte, wenn es einen p-dimensionalen Untervektorraum $E' \subset E$ gibt, so daß $Q(\xi,\xi) > 0$ für alle $\xi \in E' - \{0\}$ ist.

Der Beweis ergibt sich aus dem Satz über die Hauptachsentransformation und aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz. Einzelheiten finden sich z.B. bei Bourbaki.

I.3.4.Satz: Sei $\Phi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, $x \in \underline{X}$, $y := \tilde\Phi(x) \in \underline{Y}$. Sei $V \subset \underline{Y}$ offen mit $y \in V$, $U := \tilde\Phi^{-1}(V)$.
Sei $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$.
a) Es ist $\mathrm{Lev}_x(s\circ\Phi)(\xi,\eta) = \mathrm{Lev}_y(s)(T_x(\Phi)(\xi), T_x(\Phi)(\eta))$.

b) Ist $T_x(\phi)$ injektiv und s q-konvex in y, so ist $s\circ\phi$ q-konvex in x.
c) Ist $T_x(\phi)$ surjektiv und $s\circ\phi$ q-konvex in x, so ist s q-konvex in y.
d) Ist ϕ biholomorph, so ist s genau dann q-konvex in y, wenn $s\circ\phi$ q-konvex in x ist.

Beweis: a) Sei (W,φ,B) eine komplexe Karte für X mit $x\in W$ und (W',ψ,B') eine komplexe Karte für Y mit $y\in W'$. Es gebe eine holomorphe Abbildung $F : B \to B'$ mit $\psi\circ\phi = F\circ\varphi$. Ist f ein Repräsentant für s bezüglich ψ, so ist $f\circ F$ ein Repräsentant für $s\circ\phi$ bezüglich φ.

Es folgt: $\mathrm{Lev}_x(s\circ\phi)(\xi,\eta) = \sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2(f\circ F)}{\partial z_\nu \partial\bar z_\mu}(\tilde\varphi(x))\,\xi_\nu^{(\varphi)}\,\overline{\eta}_\mu^{(\varphi)} =$

$= \sum_{\lambda,\kappa} \frac{\partial^2 f}{\partial w_\lambda \partial\bar w_\kappa}(\tilde\psi(y))\Big(\sum_\nu \xi_\nu^{(\varphi)}\frac{\partial F_\lambda}{\partial z_\nu}(\tilde\varphi(x))\Big)\Big(\sum_\mu \overline{\eta}_\mu^{(\varphi)}\frac{\partial \bar F_\kappa}{\partial \bar z_\mu}(\tilde\varphi(x))\Big) =$

$= \mathrm{Lev}_y(s)(T_x(\phi)(\xi),T_x(\phi)(\eta))$.

b) Sei $n := \mathrm{eib}_x X$, $m := \mathrm{eib}_y Y$.
Sei $T_x(\phi)$ injektiv und s q-konvex in y. Es gibt einen $(m-q+1)$-dimensionalen Unterraum $E\subset T_{Y,y}$ mit $\mathrm{Lev}_y(s)(\xi,\xi) > 0$ für alle $\xi\in E - \{0\}$.
Sei $K := T_x(\phi)^{-1}(E)\subset T_{X,x}$. Aus a) folgt, daß $s\circ\phi$ in x q'-konvex ist, mit $n - q' + 1 = \dim K$. Offensichtlich ist $K \cong (\mathrm{Im}\, T_x(\phi))\cap E$, also $\dim K =$
$= \dim(\mathrm{Im}\, T_x(\phi)) + \dim E - \dim((\mathrm{Im}\, T_x(\phi)) + E) \geq n + (m - q + 1) - m =$
$= n - q + 1$. Damit ist $q' \leq q$, also $s\circ\phi$ in x q-konvex.

c) Sei $T_x(\phi)$ surjektiv und $s\circ\phi$ q-konvex in x. Es gibt einen $(n-q+1)$-dimensionalen Unterraum $L\subset T_{X,x}$ mit $\mathrm{Lev}_x(s\circ\phi)(\eta,\eta) > 0$ für alle $\eta\in L - \{0\}$.
Sei $M := T_x(\phi)(L)\subset T_{Y,y}$. Aus a) folgt wieder, daß s in y q'-konvex ist, mit $m - q' + 1 = \dim M$. Es ist $\dim L - \dim(\mathrm{Ker}(T_x(\phi)\,|\,L)) = \dim M$ und $\dim(\mathrm{Ker}(T_x(\phi)\,|\,L)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\, T_x(\phi)) = n - m$, also $q' = m + 1 - \dim M \leq$
$\leq m + 1 - (n - q + 1) + (n - m) = q$. Damit ist s in y q-konvex.

d) Ist ϕ biholomorph, so ist $T_x(\phi)$ bijektiv. Die Behauptung folgt dann aus b) und c). ▼

I.3.5.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $U\subset \underline{X}$ offen, $s,s'\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ und $x\in U$. Dann gilt:

a) $\mathrm{Lev}_x(s + s')(\xi,\eta) = \mathrm{Lev}_x(s)(\xi,\eta) + \mathrm{Lev}_x(s')(\xi,\eta)$.

b) $\mathrm{Lev}_x(s\,s')(\xi,\eta) = s(x)\cdot\mathrm{Lev}_x(s')(\xi,\eta) + s'(x)\cdot\mathrm{Lev}_x(s)(\xi,\eta) +$
$+ (d's)_x(\xi)(d''s')_x(\eta) + (d's')_x(\xi)(d''s)_x(\eta)$.

c) Ist $M\subset\mathbb{R}$ offen, $h : M\to\mathbb{R}$ differenzierbar und $s(x)\in M$ für alle $x\in U$, so gilt:
$\mathrm{Lev}_x(h\circ s)(\xi,\eta) = \frac{d^2h}{dt^2}(s(x))\cdot(d's)_x(\xi)(d''s)_x(\eta) + \frac{dh}{dt}(s(x))\cdot\mathrm{Lev}_x(s)(\xi,\eta)$.

Für $h = e^{kt}$ mit $k \in \mathbb{R}$ erhält man z.B.:

$$\mathrm{Lev}_x(\exp(k\cdot s))(\xi,\eta) = k\cdot e^{k\cdot s(x)}\cdot\left[\mathrm{Lev}_x(s)(\xi,\eta) + k\cdot(d's)_x(\xi)(d''s)_x(\eta)\right].$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

I.3.6.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $i : X' \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $x \in X'$, U eine offene Umgebung von $\tilde{i}(x) \in X$ und $s \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$. Ist s q-konvex in $\tilde{i}(x)$, so ist $s|X'$ q-konvex in x.

Beweis: Es ist $s|X' = s\circ i$, $T_x(i)$ injektiv. Die Behauptung folgt also aus I.3.4.b. ▼

I.3.7.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $s \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$, $1 \leq q \leq \sup_x(\mathrm{eib}_x X) + 1$.
Dann ist $\{x \in X : s \text{ q-konvex in } x\}$ offen in X.

Beweis: Sei $x_0 \in X$, s q-konvex in x_0. Es gibt eine spezielle komplexe Karte (U,φ,B) für X in x_0 und eine differenzierbare Funktion $f \in \Gamma(B,\mathcal{A}_B)$ mit $f|U = s|U$. Identifiziert man T_{X,x_0} und $T_{B,0}$, so ist $\mathrm{Lev}_{x_0}(s) = \mathrm{Lev}_0(f)$.
Also ist f q-konvex in 0. Bekanntlich ist f dann noch in einer offenen Umgebung $B'(0) \subset B$ q-konvex. Sei $U'(x_0) \subset U$ die durch $\tilde{\varphi}(U') = \tilde{\varphi}(U) \cap B'$ gegebene offene Umgebung von x_0 in X. Nach I.3.6. ist $s|U' = f|U'$ q-konvex. ▼

I.3.8.Lemma: Sei E ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $Q : E \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form. Außerdem gebe es Linearformen $\lambda_1^{(\iota)},\ldots,\lambda_{r_\iota}^{(\iota)}$, $\iota = 1,\ldots,\iota_*$, so daß für $E_\iota := \{\xi \in E : \lambda_\nu^{(\iota)}(\xi) = 0 \text{ für } \nu = 1,\ldots,r_\iota\}$ gilt:
$Q > 0$ auf $E_\iota - \{0\}$ für alle ι. $a_\iota > 0$ und $e_\iota \geq 0$ seien reelle Konstanten, mit $\sum_{\iota=1}^{\iota_*} e_\iota = 1$. Für $k = (k_\iota)$ sei $P_k(\xi) := Q(\xi) + \sum_{\iota=1}^{\iota_*} k_\iota e_\iota a_\iota \left(\sum_{\nu=1}^{r_\iota} |\lambda_\nu^{(\iota)}(\xi)|^2\right)$.
Dann gibt es ein $k_0 = (k_\iota^{(0)})$, so daß für alle k mit $k_\iota \geq k_\iota^{(0)}$ gilt:
$P_k(\xi) > 0$ auf $E - \{0\}$.

Beweis: E sei irgendwie mit einer Norm $\|\ldots\|$ versehen, es sei
$K := \{\xi \in E : \|\xi\| = 1\}$ und $C := \{\xi \in K : Q(\xi) \leq 0\}$.
In der von der Norm auf E induzierten Topologie ist C kompakt, und für $\xi \in C$ gilt: Zu jedem ι gibt es ein ν mit $\lambda_\nu^{(\iota)}(\xi) \neq 0$, also ist $\sum_{\nu=1}^{r_\iota} |\lambda_\nu^{(\iota)}(\xi)|^2 > 0$. Aus Stetigkeitsgründen kann man Konstanten m, $\varepsilon_\iota > 0$ finden, so daß $Q(\xi) > -m$ und $\sum_{\nu=1}^{r_\iota} |\lambda_\nu^{(\iota)}(\xi)|^2 > \varepsilon_\iota$ für $\xi \in C$ ist.
Sei $k_\iota^{(0)} := \frac{m}{a_\iota \varepsilon_\iota}$ für $\iota = 1,\ldots,\iota_*$.
Für $\xi \in C$ und $k \geq k_0$ ist $P_k(\xi) > -m + \sum_{\iota=1}^{\iota_*} k_\iota e_\iota a_\iota \varepsilon_\iota \geq -m + m\cdot\sum_{\iota=1}^{\iota_*} e_\iota = 0$.

Für $\xi \in K\text{-}C$ und beliebiges k ist $P_k(\xi) \geq Q(\xi) > 0$. Schließlich gilt für $\xi \in E\text{-}\{0\}$ und $k \geq k_o$: $P_k(\xi) = \|\xi\|^2 \cdot P_k(\frac{\xi}{\|\xi\|}) > 0$. ▼

Wichtigstes Ergebnis dieses Paragraphen ist der folgende Fortsetzungssatz:

I.3.9.Satz: Sei X ein (parakompakter) komplexer Raum, $i : X' \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum, $s \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ q-konvex.

Dann gibt es eine offene Umgebung U von $\tilde{i}(\underline{X}')$ in $\underline{X}$ und eine q-konvexe differenzierbare Funktion $\hat{s} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $\hat{s}|X' = s$.

Beweis: Es sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}_X$ eine kohärente Idealgarbe mit $\mathcal{H}_{X'} \cong (\mathcal{H}_X/\mathcal{J})|\tilde{i}(\underline{X}')$. Man kann einen komplexen Atlas $(U_\iota, \varphi_\iota, B_\iota)_{\iota \in I}$ für X mit folgenden Eigenschaften finden:

1) $(U_\iota)_{\iota \in I}$ ist eine lokal-endliche offene Überdeckung von $\underline{X}$.

2) $\overline{U}_\iota$ ist für jedes $\iota \in I$ kompakt.

3) Es gibt holomorphe Funktionen $f_1^\iota, \ldots, f_{q_\iota}^\iota, f_{q_\iota+1}^\iota, \ldots, f_{p_\iota}^\iota \in \Gamma(B_\iota, \mathcal{H}_{B_\iota})$, so daß für $g_1^\iota, \ldots, g_{q_\iota}^\iota \in \Gamma(U_\iota, \mathcal{H}_X)$ mit $(g_\nu^\iota)_x := \hat{\varphi}_x((f_\nu^\iota)_{\tilde{\varphi}(x)})$ gilt:
$\mathcal{H}_X|U_\iota \cong (\mathcal{H}_{B_\iota}/(f_1^\iota, \ldots, f_{p_\iota}^\iota)\mathcal{H}_{B_\iota})|\tilde{\varphi}(U_\iota)$,
$\mathcal{J}|U_\iota = (g_1^\iota, \ldots, g_{q_\iota}^\iota)\mathcal{H}_X|U_\iota$.

Sei nun $s^* \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $s^*|X' = s$ (vgl. Folgerung I.1.11.). Für $\iota \in I$ ist $\hat{s}_\iota := \sum_{\nu=1}^{q_\iota} f_\nu^\iota \bar{f}_\nu^\iota \in \Gamma(B_\iota, \mathcal{A}_{B_\iota})$, also $s_\iota := \hat{s}_\iota|U_\iota \in \Gamma(U_\iota, \mathcal{O}_X)$. Sei $(e_\iota)_{\iota \in I}$ eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$, $\hat{s}_{(k)} := s^* + \sum_{\iota \in I} k_\iota s_\iota e_\iota \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ für $k = (k_\iota)_{\iota \in I}$. Es ist $\hat{s}_\iota = \sum_\nu (\frac{1}{2}\bar{f}_\nu^\iota) \cdot f_\nu^\iota + \sum_\nu (\overline{\frac{1}{2}\bar{f}_\nu^\iota}) \cdot \bar{f}_\nu^\iota$, also $s_\iota|X' = \hat{s}_\iota|X' \cap U_\iota = 0$, also $\hat{s}_{(k)}|X' = s^*|X' = s$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß man k so wählen kann, daß $\hat{s}_{(k)}$ auf X' und damit auch auf einer offenen Umgebung von X' q-konvex ist.

Sei $x_o \in \tilde{i}(\underline{X}')$. Es ist $\mathrm{Lev}_{x_o}(\hat{s}_{(k)})(\xi, \xi) = \mathrm{Lev}_{x_o}(s^*)(\xi, \xi) +$
$+ \sum_{\iota \in I} k_\iota \left[e_\iota(x_o) \cdot \mathrm{Lev}_{x_o}(s_\iota)(\xi, \xi) + 2 \cdot \mathrm{Re}(d's_\iota)_{x_o}(\xi)\overline{(d'e_\iota)_{x_o}(\xi)} \right] =$
$= \mathrm{Lev}_{x_o}(s^*)(\xi, \xi) + \sum_{\iota \in I} k_\iota e_\iota(x_o) \cdot (\sum_{\nu=1}^{q_\iota} |(d'g_\nu^\iota)_{x_o}(\xi)|^2)$.

Da s in x_o q-konvex ist, gibt es einen (n-q+1)-dimensionalen Unterraum $E_1 \subset T_{X', x_o}$, so daß $\mathrm{Lev}_{x_o}(s) > 0$ auf $E_1 - \{0\}$ ist. (es sei $n := \mathrm{eib}_{x_o} X'$, $m := \mathrm{eib}_{x_o} X$). Dann ist $\mathrm{Lev}_{x_o}(s^*)$ positiv definit auf dem ebenfalls (n-q+1)-dimensionalen Vektorraum $E_2 := T_{x_o}(i)(E_1) \subset T_{X, x_o}$.

Ist E_3 ein beliebiger Komplementärraum zu $T_{x_o}(i)(T_{X',x_o})$ in T_{X,x_o}, so kann man Lemma I.3.8. auf $E := E_2 \oplus E_3$ anwenden (mit $\dim E = (n-q+1) + (m-n) = m-q+1$).

Für jedes $\iota \in I$ ist $Z_\iota := \{\varkappa \in I : \overline{U}_\iota \cap U_\varkappa \neq \emptyset\}$ eine endliche Menge.

Man setze $Q := \mathrm{Lev}_{x_o}(s^*)$, $\lambda_\nu^{(\iota)} := (d'g_\nu^\iota)_{x_o}$, $a_\iota := 1$ und $e_\iota := e_\iota(x_o)$ für $\iota \in I_{x_o} := \{\iota \in I : x_o \in U_\iota\}$. Da $\{\xi \in E : \lambda_\nu^{(\iota)}(\xi) = 0 \text{ für } \nu = 1,\dots,q_\iota\} = E \cap \{\xi \in T_{X,x_o} : (d'g_\nu^\iota)_{x_o}(\xi) = 0 \text{ für } \nu = 1,\dots,q_\iota\} = E \cap T_{x_o}(i)(T_{X',x_o}) = E_2$ ist, sind alle Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Es gibt Zahlen $k_\iota(x_o) \geq 1$, $\iota \in I_{x_o}$, so daß für $k = (k_\iota)_{\iota \in I}$ mit $k_\iota \geq k_\iota(x_o)$ für $\iota \in I_{x_o}$ und $k_\iota \geq 1$ für $\iota \in I - I_{x_o}$ die quadratische Form $\mathrm{Lev}_{x_o}(\hat{s}_{(k)})$ auf E positiv definit ist.

Da für $k \geq k_o$ und beliebiges x stets $\mathrm{Lev}_x(\hat{s}_{(k)}) \geq \mathrm{Lev}_x(\hat{s}_{(k_o)})$ ist, gibt es eine offene Umgebung W_{x_o} von x_o in $\underline{X}$, so daß $\hat{s}_{(k)}$ mit $k = (k_\iota)_{\iota \in I}$ und $k_\iota \geq k_\iota(x_o)$ für $\iota \in I_{x_o}$ und $k_\iota \geq 1$ für $\iota \in I - I_{x_o}$ q-konvex auf W_{x_o} ist.

Für $x_o \in \overline{U}_\varkappa$ ist $I_{x_o} \subset Z_\varkappa$. Da $\overline{U}_\varkappa$ kompakt ist, gibt es Zahlen $k_\iota^{(\varkappa)} \geq 1$, $\iota \in Z_\varkappa$, so daß für $x \in \overline{U}_\varkappa \cap \underline{X}'$ gilt: $\hat{s}_{(k)}$ ist für jedes $k = (k_\iota)$ mit $k_\iota \geq k_\iota^{(\varkappa)}$ für $\iota \in Z_\varkappa$ und $k_\iota \geq 1$ für $\iota \in I - Z_\varkappa$ in x q-konvex. Sei nun $k_\iota^* := \max_{\varkappa \in Z_\iota} k_\iota^{(\varkappa)}$ für $\iota \in I$, $k^* := (k_\iota^*)_{\iota \in I}$ und $\hat{s} := \hat{s}_{(k^*)}$.

Es ist $\hat{s} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $\hat{s}|X' = s$, und für $x \in \underline{X}'$ gilt:

Es gibt ein $\varkappa \in I$ mit $x \in \overline{U}_\varkappa \cap \underline{X}'$. Ist $\iota \in Z_\varkappa$, so ist auch $\varkappa \in Z_\iota$ und damit $k_\iota^* \geq k_\iota^{(\varkappa)}$. Für $\iota \in I - Z_\varkappa$ ist selbstverständlich $k_\iota^* \geq 1$. Also ist $\hat{s}$ q-konvex in x. ▼

§ 4 q-konvexe Räume

I.4.1.Definition: Sei $X = (\underline{X}, \mathcal{H}_X)$ ein komplexer Raum. X heißt q-konvex, falls es ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ gibt, so daß gilt:

a) Für alle $c < \sup(s)$ ist $\underline{X}_c(s) := \{x \in \underline{X} : s(x) < c\} \subset\subset \underline{X}$.

b) Es gibt ein $c_o < \sup(s)$, so daß s auf $\underline{X} - \underline{X}_{c_o}(s)$ q-konvex ist.

I.4.2.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $U \subset \underline{X}$ offen, $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und $x_o \in U$. Dann nennt man den $\mathbb{C}$-Vektorraum $H_{x_o}(s) := \{\xi \in T_{X,x_o} : (d's)_{x_o}(\xi) = 0\}$ den analytischen Tangentialraum an die Niveaufläche von s in x_o.

I.4.3.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $U \subset\subset \underline{X}$ offen. U hat einen q-konvexen Rand, falls es zu jedem $x_0 \in \partial U$ eine offene Umgebung $V(x_0) \subset \underline{X}$ und ein $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ gibt, so daß gilt:

a) $V \cap U = \{x \in V : s(x) < s(x_0)\}$.

b) $\mathrm{Lev}_{x_0}(s) \big| H_{x_0}(s) \times H_{x_0}(s)$ hat höchstens q-1 nicht-positive Eigenwerte.

I.4.4.Lemma: Sei X ein komplexer Raum, $U \subset\subset \underline{X}$ offen. U hat genau dann einen q-konvexen Rand, wenn zu jedem $x_0 \in \partial U$ eine offene Umgebung $V(x_0) \subset \underline{X}$ und ein $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ existiert, so daß gilt:

a) $V \cap U = \{x \in V : s(x) < 0\}$.

b) s ist q-konvex in x_0.

Beweis: 1) U habe einen q-konvexen Rand, es sei $x_0 \in \partial U$. Es gibt eine offene Umgebung $V(x_0)$ und ein $s^* \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, so daß die Bedingungen von Def.I.4.3. erfüllt sind. Es sei $s := s^* - s^*(x_0)$ und $t_k := s \cdot \exp(k \cdot s)$ mit einer noch zu wählenden Konstanten $k > 0$.

Dann ist $\mathrm{Lev}_{x_0}(t_k)(\xi, \xi) = \mathrm{Lev}_{x_0}(s^*)(\xi, \xi) + 2k \cdot \left|(d's^*)_{x_0}(\xi)\right|^2$.

Sei $G \subset H_{x_0}(s^*)$ ein $(\dim H_{x_0}(s^*) - q + 1)$-dimensionaler Unterraum, auf dem $\mathrm{Lev}_{x_0}(s^*)$ positiv definit ist. Sei weiterhin F ein Komplementärraum zu $H_{x_0}(s^*)$ in T_{X,x_0} und $E := G \oplus F$. Dann läßt sich Lemma I.3.8. anwenden: Es gibt ein k_0, so daß für $k \geq k_0$ gilt: $\mathrm{Lev}_{x_0}(t_k)$ ist auf E positiv definit. Da $\dim E = \mathrm{eib}_{x_0} X - q + 1$ ist, bedeutet das, daß t_k in x_0 q-konvex ist. Außerdem ist

$\{x \in V: t_k(x) < 0\} = \{x \in V: s(x) < 0\} = \{x \in V: s^*(x) < s^*(x_0)\} = V \cap U$.

2) Sei $x_0 \in \partial U$, $V(x_0)$ eine offene Umgebung und $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ eine in x_0 q-konvexe differenzierbare Funktion mit $V \cap U = \{x \in V: s(x) < 0\}$. Da offensichtlich $s(x_0) = 0$ ist, bleibt nur zu zeigen, daß $\mathrm{Lev}_{x_0}(s)$ auf $H_{x_0}(s)$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 hat.

Sei $n := \mathrm{eib}_{x_0} X$ und $m := \dim H_{x_0}(s)$. Es gibt einen (n-q+1)-dimensionalen Unterraum $F \subset T_{X,x_0}$, auf dem $\mathrm{Lev}_{x_0}(s)$ positiv definit ist. Sei $G := F \cap H_{x_0}(s)$. Dann ist $G \subset H_{x_0}(s)$ und $\dim G = \dim F + \dim H_{x_0}(s) - \dim(F + H_{x_0}(s)) \geq$

$\geq (n-q+1) + m - n = m - q + 1$. ▼

I.4.5.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $G \subset \underline{X}$ offen und relativ-kompakt. Hat G einen 1-konvexen Rand, so gibt es eine offene Umgebung U von ∂G und ein $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, so daß gilt:

a) s ist 1-konvex.

b) $U \cap G = \{x \in U : s(x) < 0\}$.

(existiert umgekehrt eine solche globale 1-konvexe Randfunktion, so hat G definitionsgemäß einen 1-konvexen Rand)

Beweis: Da ∂G kompakt ist, kann man nach Lemma I.4.4. offene Mengen $V_1,\dots,V_l$ und 1-konvexe Funktionen $s_\lambda \in \Gamma(V_\lambda, \mathcal{O}_X)$ für $\lambda = 1,\dots,l$ finden, so daß gilt:

1) $V_\lambda \cap G = \{x \in V_\lambda : s_\lambda(x) < 0\}$ für $\lambda = 1,\dots,l$.

2) $\partial G \subset U^* := \bigcup_{\lambda=1}^{l} V_\lambda$.

Sei (e_λ) eine Teilung der Eins zur Überdeckung (V_λ) von U^*,

$s := \sum_{\lambda=1}^{l} e_\lambda (s_\lambda + k_\lambda s_\lambda^2)$ mit noch geeignet zu wählenden Konstanten $k_\lambda > 0$.

Es ist offensichtlich, daß es eine Umgebung U^{**} von ∂G in U^* gibt, so daß $U^{**} \cap G = \{x \in U^{**} : s(x) < 0\}$ ist.

Sei nun $x_o \in \partial G$. Dann ist $\mathrm{Lev}_{x_o}(s)(\xi,\xi) =$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l} \Big[e_\lambda(x_o)(\mathrm{Lev}_{x_o}(s_\lambda)(\xi,\xi) + 2k_\lambda \big|(d's_\lambda)_{x_o}(\xi)\big|^2) + 2\,\mathrm{Re}(d'e_\lambda)_{x_o}(\xi)(d''s_\lambda)_{x_o}(\xi) \Big]$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l} \Big[Q_\lambda(\xi) + e_\lambda(x_o)\cdot 2k_\lambda \big|(d's_\lambda)_{x_o}(\xi)\big|^2 \Big],$$

mit $Q_\lambda(\xi) := e_\lambda(x_o)\cdot \mathrm{Lev}_{x_o}(s_\lambda)(\xi,\xi) + 2\,\mathrm{Re}(d'e_\lambda)_{x_o}(\xi)\overline{(d's_\lambda)_{x_o}(\xi)}$.

Ist $e_\lambda(x_o) = 0$, so kann man annehmen, daß auch $(d'e_\lambda)_{x_o} = 0$ ist. Der λ-te Summand verschwindet in diesem Fall. Andererseits gibt es mindestens ein λ mit $e_\lambda(x_o) > 0$. Für einen solchen Summanden sind alle Voraussetzungen von Lemma I.3.8. erfüllt. Es gibt ein $k_\lambda^{(o)}$, so daß für alle $k_\lambda \geq k_\lambda^{(o)}$ der λ-te Summand positiv definit ist. So kann man erreichen, daß s in x_o 1-konvex ist. Da ∂G kompakt ist, lassen sich die Konstanten k_λ so wählen, daß s sogar auf ganz ∂G (und dann auf einer offenen Umgebung $U(\partial G) \subset U^{**}$) 1-konvex ist. ▼

Ein entsprechender Satz für beliebige q-Konvexität ist bislang nicht bekannt. Im Folgenden sind einige speziellere Ergebnisse zusammengestellt:

I.4.6.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $G \subset\subset X$ offen. Es gebe eine offene Umgebung U von ∂G und ein $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, so daß gilt:

a) $G \cap U = \{x \in U : s(x) < 0\}$.

b) s ist q-konvex in jedem Punkt $x \in \partial G$.

Dann ist G ein q-konvexer Raum.

Beweis: trivial!

I.4.7.Satz: Ist X ein q-konvexer Raum, vermöge einer Ausschöpfungsfunktion s, die auf $X - X_{c_o}(s)$ q-konvex ist, so sind auch alle Mengen $X_c(s)$ mit $c_o < c < \sup(s)$ q-konvexe Räume.

Beweis: trivial!

I.4.8.Satz: Ein komplexer Raum X ist genau dann q-konvex, wenn es ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) $\underline{X}_c(s) \subset\subset \underline{X}$ für alle $c < \sup(s)$.

b) Es gibt ein $c_o < \sup(s)$, so daß für alle $x \in \underline{X} - \underline{X}_{c_o}(s)$ gilt:

$Lev_x(s) \mid H_x(s) \times H_x(s)$ hat höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0.

Beweis: 1) Ist X q-konvex, so gibt es ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ und ein $c_o < \sup(s)$, so daß a) erfüllt ist und s auf $\underline{X} - \underline{X}_{c_o}(s)$ q-konvex ist. Der 2.Teil des Beweises von Lemma I.4.4. ergibt wörtlich, daß s auch b) erfüllt.

2) Es sei ein s mit den Bedingungen a) b) gegeben. Für $k \in \mathbb{R}_+$, $x \in \underline{X} - \underline{X}_{c_o}(s)$ und $\xi \in T_{X,x}$ sei $Q_x^{(k)}(\xi) := Lev_x(s)(\xi, \xi) + 2k \cdot |(d's)_x(\xi)|$.

Sei $x_o \in \underline{X} - \underline{X}_{c_o}(s)$, (U, φ, B) eine spezielle komplexe Karte für X in x_o, $\hat{s} \in \Gamma(B, \mathcal{A}_B)$ mit $\hat{s}|U = s|U$. Für $z \in B$ sei $\hat{Q}_z^{(k)}(\xi) := Lev_z(\hat{s})(\xi, \xi) + 2k \cdot |(d'\hat{s})_z(\xi)|$. $\hat{Q}_z^{(k)}(\xi)$ ist stetig auf $T(B) = B \times \mathbb{C}^n$ (mit $n = \dim B$), und für $x \in U$ gilt offensichtlich: $Q_x^{(k)}(\xi) = \hat{Q}^{(k)}_{\tilde{\varphi}(x)}(T_x(\varphi)(\xi))$.

Wie im 1.Teil des Beweises von Lemma I.4.4. kann man zeigen, daß es ein k_o gibt, so daß $\hat{Q}^{(k)}_{x_o}$ für $k \geq k_o$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 besitzt.

Dann kann man aber sogar ein k_o finden, so daß $\hat{Q}^{(k)}_{\tilde{\varphi}(x)}$ für $k \geq k_o$ und $x \in U$ (notfalls nach Verkleinerung von U) stets höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 besitzt.

Für $x \in U$ sei dann $E_x := T_x(\varphi)(T_{X,x})$ und $F_x \subset T_{B,x}$ ein (n-q+1)-dimensionaler Unterraum, so daß $\hat{Q}^{(k)}_{\tilde{\varphi}(x)} | F_x$ für $k \geq k_o$ positiv definit ist. Dann ist $Q_x^{(k)} | T_x(\varphi)^{-1}(F_x)$ positiv definit, und es ist $\dim(T_x(\varphi)^{-1}(F_x)) =$

$= \dim(F_x \cap E_x) = \dim F_x + \dim T_{X,x} - \dim(F_x + E_x) \geq (n-q+1) + eib_x X - n =$

$= eib_x X - q + 1$. $Q_x^{(k)}$ hat höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0.

Die Moral ist nun: Zu jedem $x_o \in \underline{X} - \underline{X}_{c_o}(s)$ gibt es eine offene Umgebung U_{x_o} und eine Konstante k_{x_o}, so daß $Q_x^{(k)}$ (als quadratische Form auf $T_{X,x}$) für jedes $x \in U_{x_o}$ und $k \geq \frac{k_x}{2}o$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 besitzt.

Sei $c_o < c_1 < c_2 < \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen, die gegen $c_\infty := \sup(s)$ konvergiert, $K_\nu := \{x \in \underline{X} : s(x) \leq c_\nu\}$ für $\nu = 1,2,3,\ldots$. K_ν ist kompakt, und es gilt: $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = \underline{X}$. Für $\nu \geq 2$ wähle man endlich viele Punkte $x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{a(\nu)}^{(\nu)}$, so daß $K_\nu - \overset{c}{K}_{\nu-1}$ bereits von $U_{x_1^{(\nu)}}, \ldots, U_{x_{a(\nu)}^{(\nu)}}$ überdeckt wird.

Sei $k_{\mu}^{(\nu)}$ die im obigen Sinne zu $U_{x_\mu^{(\nu)}}$ gehörende Konstante,

$b_2 := \max(k_1^{(2)},\dots,k_{a(2)}^{(2)})$, $b_\nu := \max(b_{\nu-1},\max(k_1^{(\nu)},\dots,k_{a(\nu)}^{(\nu)}))$ für $\nu \geq 3$.

Schließlich sei c_ν^* eine Folge von reellen Zahlen mit $c_\nu < c_\nu^* < c_{\nu+1}$.

Es gibt eine C^∞-Funktion $g :]-\infty, c_\infty[\to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$g\,|\,]-\infty, c_1] = b_2$, $b_{\nu+1} \leq g\,|\,]c_\nu, c_\nu^*[\leq b_{\nu+2}$ und $g\,|\,[c_\nu^*, c_{\nu+1}] = b_{\nu+2}$.

Sei $\delta > 0$, $b(c) := g(c) + \delta$, $\tilde{h}(c) := \int_{c_0}^{c} b(c')dc'$, $h(c) := \int_{c_0}^{c} e^{\tilde{h}(c')}dc'$.

Dann ist $h :]-\infty, c_\infty[\to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $h'(c) = e^{\tilde{h}(c)} > 0$ für $c > c_0$ und $\frac{h''}{h'}(c) = (\log h')'(c) = b(c) > g(c)$ für $c > c_0$.

Offensichtlich ist $h \circ s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, und es gilt: $\{x \in \underline{X} : h \circ s(x) < c\} = \{x \in \underline{X} : s(x) < h^{-1}(c)\} \subset\subset \underline{X}$, da h streng monoton ist. Ist $x_0 \in \underline{X} - \underline{X}_{c_1}(s) = \underline{X} - \{x \in \underline{X} : h \circ s(x) < h(c_1)\}$, so liegt x_0 in einer der Mengen $K_\nu - \overset{\circ}{K}_{\nu-1}$, insbesondere in einem $U_{x_\lambda^{(\nu)}}$. Es ist $g\,|\,s^{-1}(K_\nu - \overset{\circ}{K}_{\nu-1}) = g\,|\,[c_{\nu-1}, c_\nu] \geq b_\nu \geq a_\lambda^{(\nu)}$, und $\mathrm{Lev}_{x_0}(h \circ s)(\xi,\xi) = h'(s(x_0))\cdot \mathrm{Lev}_{x_0}(s)(\xi,\xi) + h''(s(x_0))\cdot |(d's)_{x_0}(\xi)|^2 >$

$> h'(s(x_0))\cdot\left[\mathrm{Lev}_{x_0}(s)(\xi,\xi) + g(s(x_0))\cdot |(d's)_{x_0}(\xi)|^2\right] =$

$= h'(s(x_0))\cdot Q_{x_0}^{(g(s(x_0))/2)}(\xi)$. Daher besitzt $\mathrm{Lev}_{x_0}(h \circ s)$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0, $h \circ s$ ist q-konvex in x_0. Mittels $h \circ s$ wird X zu einem q-konvexen Raum. ▼

I.4.9.Lemma: Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ offen, $z_0 \in B$. Es seien s,t differenzierbare Funktionen auf B mit $\{z \in B : s(z) < 0\} = \{z \in B : t(z) < 0\}$, $s(z_0) = t(z_0) = 0$, $(d's)_{z_0} \neq 0$, t q-konvex in z_0.

Dann hat $\mathrm{Lev}_{z_0}(s)$ auf $H_{z_0}(s)$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0.

Beweis: Es ist $\dim H_{z_0}(s) = n-1$. Für $q \geq n$ ist daher nichts zu zeigen, es sei $q < n$. Da $(d's)_{z_0} \neq 0$ ist, gibt es eine offene Umgebung $U(z_0) \subset B$, eine konvexe offene Menge $V \subset \mathbb{C}^n$ und einen Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ mit $\phi(z_0) = 0$, $\phi(\{z \in U : s(z) < 0\}) = \{w \in V : x_1 := \mathrm{Re}(w_1) < 0\}$ und $\phi(\{z \in U : s(z) = 0\}) = \{w \in V : x_1 = 0\}$. Sei $\tilde{s} := s \circ \phi^{-1}$ und $\tilde{t} := t \circ \phi^{-1}$. Man kann dann Funktionen h_1, h_2 auf V finden, so daß $\tilde{s} = h_1 \cdot x_1$ und $\tilde{t} = h_2 \cdot x_1$ ist. Dabei ist $h_1(0) \neq 0$ und dann o.B.d.A. $h_1(w) \neq 0$ für alle $w \in V$. Sei $h := \frac{h_2}{h_1} \circ \phi$. Es ist $t = h \cdot s$ auf U, und es folgt: $\mathrm{Lev}_{z_0}(t)(\xi,\xi) = h(z_0)\cdot \mathrm{Lev}_{z_0}(s)(\xi,\xi) +$

$+ 2\,\mathrm{Re}((d'h)_{z_o}(\xi)\overline{(d's)_{z_o}(\xi)})$.

Wäre $h(z_o) < 0$, so wäre $h(z) < 0$ für $z \in W = W(z_o)$. Andererseits gilt für $z \in W \cap B$: $s(z) < 0$, also $h(z) \cdot s(z) > 0$, aber auch $h(z) \cdot s(z) = t(z) < 0$. Das kann nicht sein. Wäre $h(z_o) = 0$, so wäre $\mathrm{Lev}_{z_o}(t)(\xi, \xi) = 0$ für alle $\xi \in H_{z_o}(s)$. $\mathrm{Lev}_{z_o}(t)$ besäße dann höchstens einen positiven Eigenwert, t wäre höchstens n-konvex. Das ist ebenfalls ein Widerspruch, es muß $h(z_o) > 0$ sein.

O.B.d.A. gibt es somit eine differenzierbare Funktion $\hat{h} > 0$ auf U, so daß $s = \hat{h} \cdot t$ auf U ist. Es folgt, daß $H_{z_o}(s) = H_{z_o}(t)$ ist, und wegen

$\mathrm{Lev}_{z_o}(s)(\xi, \xi) = \hat{h}(z_o) \cdot \mathrm{Lev}_{z_o}(t)(\xi, \xi) + 2\,\mathrm{Re}((d'\hat{h})_{z_o}(\xi)\overline{(d't)_{z_o}(\xi)})$

hat $\mathrm{Lev}_{z_o}(s)$ auf $H_{z_o}(s)$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0. ▼

Als Folgerung erhält man:

I.4.10.Satz: Sei $X = (\underline{X}, \mathcal{H}_X)$ eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Es gebe ein $s \in \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $\underline{X}_c = \underline{X}_c(s) \subset\subset \underline{X}$ für $c < c_\infty := \sup(s)$.
2) $\underline{X}_c$ hat für $c_o < c < c_\infty$ einen q-konvexen Rand.
3) $(d's)_x \neq 0$ für $x \in \underline{X} - \underline{X}_{c_o}$.

Dann ist X eine q-konvexe Mannigfaltigkeit.

Beweis: Mit Hilfe von Lemma I.4.9. folgt, daß $\mathrm{Lev}_x(s)$ auf $H_x(s)$ für jedes $x \in \underline{X} - \underline{X}_{c_o}$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 hat. Nach Satz I.4.8. ist X dann q-konvex. ▼

Es ist nicht bekannt, ob sich ein solcher Satz auch für Räume mit Singularitäten beweisen läßt.

KAPITEL II POSITIVE LINEARE FASERRÄUME ÜBER KOMPLEXEN RAUMEN

§ 1 Lineare Räume und Vektorbündel

Sei X ein komplexer Raum. Ein komplexer Faserraum über X besteht aus einem komplexen Raum E und einer holomorphen Abbildung $\pi : E \to X$.
Sind $E \xrightarrow{\pi} X$ und $E' \xrightarrow{\pi'} X$ komplexe Faserräume über X, so nennt man eine holomorphe Abbildung $\varphi : E \to E'$ mit $\pi' \circ \varphi = \pi$ einen Homomorphismus von komplexen Faserräumen.

Für einen komplexen Raum X sei $\Delta : X \to X \times_X X$ der kanonische Isomorphismus. Sind $E \xrightarrow{\pi} X$ und $E' \xrightarrow{\pi'} X$ komplexe Faserräume über X, so ist $\pi * \pi' := \Delta^{-1} \circ (\pi \times_X \pi') : E \times_X E' \to X$ ebenfalls ein komplexer Faserraum über X. Ist Y ein weiterer komplexer Raum, so ist auch $\pi \circ pr_2 : Y \times E \to X$ ein komplexer Faserraum über X. Ein komplexer Faserraum heißt trivial, wenn er isomorph zu $pr_1 : X \times Y \to X$ mit einem geeigneten Y ist.

Ist $U \subset X$ ein offener Teilraum, so gibt es kanonische Homomorphismen von komplexen Faserräumen $A_U : (U \times \mathbb{C}^q) \times_U (U \times \mathbb{C}^q) \to U \times \mathbb{C}^q$, $B_U : \mathbb{C} \times (U \times \mathbb{C}^q) \to U \times \mathbb{C}^q$, $O_U : U \to U \times \mathbb{C}^q$ mit $\widetilde{A}_U((x,z),(x,z')) = (x,z+z')$, $\widetilde{B}_U(c,(x,z)) = (x,cz)$, $\widetilde{O}_U(x) = (x,0)$.

II.1.1.Definition: Ein linearer komplexer Faserraum über X ist ein Quintupel $(E, \pi, \alpha, \beta, \omega_E)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $E \xrightarrow{\pi} X$ ist ein komplexer Faserraum.

b) $\alpha : E \times_X E \to E$, $\beta : \mathbb{C} \times E \to E$ und $\omega_E : X \to E$ sind Homomorphismen von komplexen Faserräumen.

c) Zu jedem $x \in \underline{X}$ gibt es einen offenen Teilraum $U \subset X$ mit $x \in \underline{U}$ und eine abgeschlossene Einbettung $j : E_U := \pi^{-1}(U) \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ mit $pr_1 \circ j = \pi$, so daß gilt: $A_U \circ (j \times_U j) = j \circ \alpha$, $B_U \circ (id \times j) = j \circ \beta$ und $O_U = j \circ \omega_E$.

(Diese Definition ist äquivalent zu der von G.Fischer in [5] bzw. [6])

Offensichtlich ist $(U \times \mathbb{C}^q, pr_1, A_U, B_U, O_U)$ selbst ein linearer komplexer Faserraum, ein sogenannter "trivialer linearer komplexer Faserraum".
Zur Abkürzung werden wir künftig einen linearen komplexen Faserraum einfach als "linearen Raum" bezeichnen.

II.1.2.Definition: $(E, \pi, \alpha, \beta, \omega_E)$, $(E', \pi', \alpha', \beta', \omega_{E'})$ seien lineare Räume über X. Ein Homomorphismus von linearen Räumen ist ein Homomorphismus $\varphi : E \to E'$ von komplexen Faserräumen, so daß gilt:

a) $\alpha' \circ (\varphi \times_X \varphi) = \varphi \circ \alpha$.

b) $\beta' \circ (id \times \varphi) = \varphi \circ \beta$.

(Man kann dann folgern, daß $\varphi \circ \omega_E = \omega_{E'}$ ist)
Existiert auch ein Homomorphismus $\varphi' : E' \to E$ von linearen Räumen mit $\varphi \circ \varphi' = id_{E'}$ und $\varphi' \circ \varphi = id_E$, so heißt φ ein Isomorphismus von linearen Räumen. Ein linearer Raum heißt Vektorbündel vom Rang q, wenn er lokal stets isomorph zu einem Raum $U \times \mathbb{C}^q$ ist.

Bemerkung: Sei $\varphi : E \to E'$ ein Homomorphismus von linearen Räumen über X. Sei $U \subset X$ ein offener Teilraum, so daß es lineare Einbettungen $j_q : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ und $j_p : E'_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^p$ gibt. Dann kann man zeigen, daß es zu jedem $x_o \in \underline{U}$ einen offenen Teilraum $W \subset U$ mit $x_o \in \underline{W}$ und eine holomorphe Abbildung $M : W \to M_{p,q}(\mathbb{C})$ gibt, so daß $(pr_1, ev \circ (M \times id)) \circ j_q = j_p \circ \varphi$ ist. (Dabei sei $ev : M_{p,q}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^p$ definiert durch $ev(A,z) = A \cdot z$)

II.1.3.Definition: Sei $(E, \pi, \alpha, \beta, \omega_E)$ ein linearer Raum, $E' \subset E$ ein komplexer Unteraum, $i : E' \hookrightarrow E$ die natürliche Injektion.
Ist $(E', \pi \circ i, \alpha \circ (i \times_X i), \beta \circ (id \times i), i \circ \omega_E)$ ein linearer Raum und i ein Homomorphismus von linearen Räumen, so nennt man E' einen linearen Unterraum von E.

Offensichtlich ist jeder lineare Raum lokal Unteraum eines trivialen linearen Raumes. Man kann zeigen, daß für jedes $x_o \in \underline{X}$ die Faser $E_{x_o} := \pi^{-1}(X_o)$ ein reduzierter komplexer Raum ist, auf dem α, β, ω_E eine $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur induzieren. Man kann weiterhin zeigen, daß es eine Umgebung $U(x_o)$ und eine lineare Einbettung $j : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ gibt, so daß $q = rg_{x_o} E := \dim_{\mathbb{C}}(E_{x_o})$ ist. Wir nennen j in diesem Fall eine Pseudotrivialisierung von E in x_o. $j_x := j|E_x : E_x \to \mathbb{C}^q$ ist für jedes $x \in \underline{U}$ ein injektiver $\mathbb{C}$-Vektorraum-Isomorphismus. Außerhalb von x_o braucht j_x nicht surjektiv zu sein.

II.1.4.Satz:
a) Sei L ein linearer Raum über Y, $\varphi : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen. Dann ist $\varphi^* L := L \times_Y X$ ein linearer Raum über X.
b) Seien L, L' lineare Räume über X. Dann ist auch $L \cdot L' := L \times_X L'$ ein linearer Raum über X.

Der Beweis ist einfach und soll hier nicht ausgeführt werden.

II.1.5.Definition: Sei $L \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, $U \subset X$ ein offener Unterraum. Eine Schnittfläche in L über U ist eine holomorphe Abbildung $\xi : U \to L$ mit $\pi \circ \xi = id_U$.

Triviales Beispiel ist der Nullschnitt ω_L. Ist $L = \Lambda \times \mathbb{C}^q$ und ξ eine

Schnittfläche in L über X, so ist $\xi = (id_X, \xi_*)$ mit einer holomorphen Abbildung $\xi_* : X \to \mathbb{C}^q$.

Die Menge $\Gamma(U,L)$ aller Schnittflächen in L über U bildet vermöge $\xi_1 + \xi_2 := \alpha \circ (\xi_1, \xi_2)$ und $f \cdot \xi := \beta \circ (f, \xi)$ einen Modul über dem Ring $\Gamma(U, \mathcal{H}_X) \cong Hol(U, \mathbb{C})$. $\omega_L|U$ ist das Nullelement. Ein Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ von linearen Räumen induziert durch $\varphi_*(\xi) := \varphi \circ \xi$ einen $\Gamma(U, \mathcal{H}_X)$-Modul-Homomorphismus $\varphi_* : \Gamma(U,L) \to \Gamma(U,L')$. L ist genau dann ein Vektorbündel, wenn $\Gamma(U,L)$ für hinreichend kleines U stets frei ist.

II.1.6.Satz: Sei $L \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, $U \subset X$ offen, ξ eine Schnittfläche in L über U. Dann gilt:

a) ξ ist eine abgeschlossene Einbettung.

b) $\pi | \xi(U) : \xi(U) \to U$ ist biholomorph.

Beweis:

a) 1) $\widetilde{\xi}$ ist injektiv: Ist $\widetilde{\xi}(x) = \widetilde{\xi}(x')$, so ist $x = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\xi}(x) = \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\xi}(x') = x'$.

2) $\widetilde{\xi}$ ist abgeschlossen: Sei $A \subset \underline{U}$ abgeschlossen, $v_\nu \in \widetilde{\xi}(A)$ eine Folge mit $v_\nu \to v \in \underline{L}$. Es gibt Elemente $x_\nu \in A$ mit $\widetilde{\xi}(x_\nu) = v_\nu$, also $\widetilde{\pi}(v_\nu) = x_\nu$. Da $\widetilde{\pi}$ stetig ist, gilt: $\widetilde{\pi}(v_\nu) \to \widetilde{\pi}(v)$. Da A abgeschlossen ist, muß $\widetilde{\pi}(v) \in A$ sein, da $\widetilde{\xi}$ stetig ist, gilt: $v_\nu = \widetilde{\xi}(\widetilde{\pi}(v_\nu)) \to \widetilde{\xi}(\widetilde{\pi}(v)) \in \widetilde{\xi}(A)$, also $v \in \widetilde{\xi}(A)$.

3) Für $x \in \underline{U}$ ist $\hat{\xi}_x \circ \hat{\pi}_{\widetilde{\xi}(x)} = id_{\mathcal{H}_{X,x}}$. Sei $\hat{\sigma} \in \mathcal{H}_{X,x}$, $\tau := \hat{\pi}_{\widetilde{\xi}(x)}(\hat{\sigma}) \in \mathcal{H}_{L,\widetilde{\xi}(x)}$. Dann ist $\hat{\xi}_x(\tau) = \hat{\sigma}$. Also ist $\hat{\xi}_x : \mathcal{H}_{L,\widetilde{\xi}(x)} \to \mathcal{H}_{X,x}$ surjektiv.

b) Nach a) ist ξ eine abgeschlossene Einbettung. Es gibt einen abgeschlossenen Unterraum $j : \xi(U) \hookrightarrow L$ und eine biholomorphe Abbildung $g : U \to \xi(U)$ mit $j \circ g = \xi$. Nun ist $\pi | \xi(U) = \pi \circ j$, und wegen $id_U = \pi \circ \xi = \pi \circ j \circ g = (\pi | \xi(U)) \circ g$ ist $\pi | \xi(U) = g^{-1}$ biholomorph. ▼

II.1.7.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X durch offene Teilräume. Zu jedem $i \in I$ sei ein linearer Raum $\pi_i : L_i \to U_i$ gegeben, und zu jedem $(i,j) \in I \times I$ sei ein Isomorphismus $\theta_{ij} : \pi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \to \pi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ von linearen Räumen gegeben, so daß für alle $i,j,k \in I$ über $U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt:

$$\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik}$$

Dann gibt es einen (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) linearen Raum $\pi : L \to X$ und Isomorphismen $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to L_i$ von linearen Räumen, so daß über $U_i \cap U_j$ gilt: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = \theta_{ij}$.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen, unter Verwendung der entsprechenden Sätze über das Zusammenkleben von Garben.

Satz II.1.7. wird nun dazu verwendet, jeder kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ über $\wedge$ einen

linearen Raum $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ über X zuzuordnen. Diese Konstruktion soll hier nur angedeutet werden:

Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{H}_X$-Garbe und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, so daß es exakte Sequenzen

$$p_i\mathcal{H}_X|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} q_i\mathcal{H}_X|_{U_i} \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$$

gibt. Für $i\in I$ sei dann $(\varphi_i)_* : \Gamma(U_i, p_i\mathcal{H}_X) \longrightarrow \Gamma(U_i, q_i\mathcal{H}_X)$ der durch $(\varphi_i)_*(s) := \varphi_i\circ s$ definierte Homomorphismus von $\Gamma(U_i,\mathcal{H}_X)$-Moduln.

Es sei $\widetilde{\mathcal{K}}_i := \Big\{\sum_{\nu=1}^{q_i} f_\nu \hat{\otimes} z_\nu : (f_1,\dots,f_{q_i}) \in \mathrm{Im}(\varphi_i)_* \subset \Gamma(U_i, q_i\mathcal{H}_X) = \Gamma(U_i,\mathcal{H}_X)^{q_i}\Big\}$,

$\mathcal{K}_i := \widetilde{\mathcal{K}}_i\cdot((\mathcal{H}_\Lambda|_{U_i})\hat{\otimes}\mathcal{O}_{q_i}) \subset (\mathcal{H}_\Lambda|_{U_i})\hat{\otimes}\mathcal{O}_{q_i} = \mathcal{H}_{U_i\times\mathbb{C}^{q_i}}$.

Dann ist $N(\mathcal{K}_i) = \Big\{(x,\xi)\in U_i\times\mathbb{C}^{q_i} : \sum_{\nu=1}^{q_i} f_\nu(x)\xi_\nu = 0 \text{ für } (f_1,\dots,f_{q_i})\in \mathrm{Im}(\varphi_i)_*\Big\}$.

Schließlich sei $L_i(\mathcal{F}) := (N(\mathcal{K}_i), (\mathcal{H}_{U_i\times\mathbb{C}^{q_i}}/\mathcal{K}_i)|N(\mathcal{K}_i))$,

$j_i : L_i(\mathcal{F}) \hookrightarrow U_i\times\mathbb{C}^{q_i}$ die kanonische Einbettung und $\pi_i := \mathrm{pr}_1\circ j_i : L_i(\mathcal{F}) \to U_i$.
Dann ist $L_i(\mathcal{F})$ ein linearer Raum über U_i, ja sogar ein linearer Unterraum von $U_i\times\mathbb{C}^{q_i}$.

Über $U_i\cap U_j$ hat man ein Diagramm der folgenden Gestalt:

$$\begin{array}{ccccc} p_i\mathcal{H}_X & \xrightarrow{\varphi_i} & q_i\mathcal{H}_X & \searrow^{\psi_i} & \\ & & & & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ p_j\mathcal{H}_\Lambda & \xrightarrow{\varphi_j} & q_j\mathcal{H}_\Lambda & \nearrow_{\psi_j} & \end{array}$$

Unter einer lokalen Liftung von ψ_i verstehen wir ein Paar (W,s) mit folgenden Eigenschaften:

1) $W\subset U_i\cap U_j$ offen,
2) Es gibt Schnitte $s_\mu\in\Gamma(W,q_j\mathcal{H}_X)$, $\mu = 1,\dots,q_i$, mit $\psi_j\circ s_\mu = \psi_i\cdot 1_\mu|W$ (wobei $1_1,\dots,1_{q_i}$ die Einheitsschnitte in $q_i\mathcal{H}_X$ sind), so daß s die durch $s_{\nu\mu} := \mathrm{pr}_\nu\circ s_\mu$ definierte Matrixfunktion ist.

Jede lokale Liftung (W,s) von ψ_i definiert einen Homomorphismus

$\varphi_{(W,s)} := (\mathrm{pr}_1, \mathrm{ev}\circ(s^T\times\mathrm{id})) : W\times\mathbb{C}^{q_j} \longrightarrow W\times\mathbb{C}^{q_i}$.

Man kann zeigen, daß die lokalen Liftungen einen Isomorphismus $\theta_{ij} : L_j(\mathcal{F})|U_i\cap U_j \to L_i(\mathcal{F})|U_i\cap U_j$ induzieren und daß $\theta_{ij}\circ\theta_{jk} = \theta_{ik}$ über $U_i\cap U_j\cap U_k$ ist.

Mit Hilfe der Isomorphismen θ_{ij} klebt man schließlich die Räume $L_i(\mathcal{F})$ gemäß Satz II.1.7. zu einem linearen Raum $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ über X zusammen. Einem Garbenhomomorphismus $\varphi : \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ entspricht ein Homomorphismus $\mathrm{Lin}(\varphi) : \mathrm{Lin}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ von linearen Räumen. Man erhält also einen kontravarianten Funktor.

Sei umgekehrt $L \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum. Die Zuordnung $U \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(L_U, U \times \mathbb{C})$ ergibt ein Garbendatum auf X, durch welches eine kohärente $\mathcal{H}_\Lambda$-Garbe $\mathbb{F}(L)$ über X definiert wird. Sind $a : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Addition und Multiplikation, so wird durch $\varphi \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \varphi$ ein Isomorphismus
$\Gamma(U, \mathbb{F}(L)) \to \{f \in \mathrm{Hol}(L_U, \mathbb{C}) : f \circ \alpha = a \circ (f \times_U f),\ f \circ \beta = b \circ (\mathrm{id} \times f)\} =$
$= \{f \in \Gamma(L_U, \mathcal{H}_L) : f \text{ "linear auf den Fasern von } L"\}$ definiert.

$\mathbb{F}$ ist ein Funktor, der den Funktor Lin umkehrt. (Literatur zu diesem Themenkreis: [5], [6], [7])

Beispiele:

1) $\mathrm{Lin}(q\mathcal{H}_X) \cong X \times \mathbb{C}^q$.

2) Sei $\{x\}$ ein 1-punktiger reduzierter Raum. Die kohärenten Garben auf $\{x\}$ sind die endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräume. Ist E ein solcher Vektorraum, so gilt: $\mathrm{Lin}(E) = \{x\} \times E^*$.

3) $\mathrm{Lin}(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) = \mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Lin}(\mathcal{G})$.

4) Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, $\mathcal{F}$ kohärente $\mathcal{H}_Y$-Garbe. Dann ist $\mathrm{Lin}(f^*\mathcal{F}) = f^*(\mathrm{Lin}\,\mathcal{F})$. Insbesondere gilt für $y \in \underline{Y}$ und die Injektion $i_y : \{y\} \hookrightarrow Y$:
$\mathrm{Lin}(\mathcal{F})_y = i_y^*(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})) = \mathrm{Lin}(i_y^*\mathcal{F}) = \mathrm{Lin}(\mathcal{F}_y \otimes_{\mathcal{H}_{Y,y}} \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_{Y,y}\mathcal{F}_y, \mathbb{C})$.

5) Sei X ein komplexer Raum, Ω_X die Garbe der Pfaffschen Formen auf X (im Sinne von [8]). Dann nennt man den linearen Raum $T(X) := \mathrm{Lin}(\Omega)$ das Tangentialbündel von X. Bekanntlich gilt (vgl. [9]) für $x \in \underline{X}$: $\Omega_{X,x}$ ist der universelle Differentialmodul zu $\mathcal{H}_{X,x}$, d.h., es ist $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{X,x}, M) \cong$
$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{X,x}}(\Omega_{X,x}, M)$ für jeden endlichen $\mathcal{H}_{X,x}$-Modul M. Insbesondere gilt:
$T(X)_x = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{X,x} \otimes_{\mathcal{H}_{X,x}} \mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{X,x}}(\Omega_{X,x}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{X,x}, \mathbb{C}) = T_{X,x}$.

6) Sei $L \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum. Dann nennt man $L^* := \mathrm{Lin}(\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_X}(\mathbb{F}(L), \mathcal{H}_X))$ den "dualen linearen Raum". Es ist $(L^*)_x = (L_x)^*$ für $x \in \underline{X}$. Für beliebige offene Teilräume U von X kann man außerdem zeigen:
$\Gamma(U, L) = \mathrm{Hom}(U \times \mathbb{C}, L_U) = \Gamma(U, \mathbb{F}(L^*)) = \mathrm{Hom}(L_U^*, U \times \mathbb{C})$.

7) Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_X$ eine kohärente Idealgarbe, $L := \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ und $\pi : L \to X$ die kanonische Abbildung.
Weiter sei $Y := (N(\mathcal{F}), (\mathcal{H}_X / \mathcal{F}) \mid N(\mathcal{F}))$, $j : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung.

II.1.8.Satz: Es gibt einen Isomorphismus $\Theta : L_{X-Y} \xrightarrow{\cong} (X-Y) \times \mathbb{C}$ und ein $\xi \in \Gamma(X, L)$ mit $\xi \mid Y = \omega_L \circ j$ und $\Theta \circ \xi \mid (X-Y) = \eta$, wobei $\eta : X-Y \to (X-Y) \times \mathbb{C}$ die durch $\eta := (\mathrm{id}, 1)$ definierte Schnittfläche ist.

Beweis: Aus $\mathcal{F} \mid (X-Y) = \mathcal{H}_X \mid (X-Y)$ folgt die Existenz von Θ. Offenbar hat man $\xi \mid (X-Y) := \Theta^{-1} \circ \eta$ zu setzen.

Sei nun $x_o \in \underline{X}$, U eine offene Umgebung von x_o in $\underline{X}$, über der eine exakte Sequenz $p\mathcal{H}_X \xrightarrow{\Psi} q\mathcal{H}_X \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F} \to 0$ existiert. Über $W := U-Y$ hat man folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} p\mathcal{H}_X & \xrightarrow{\Psi} & q\mathcal{H}_X & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{F} \to 0 \\ & & & \nearrow_{\mathrm{id}} & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_X & & \end{array}$$

Sei $s_\mu := \mathrm{id}^{-1} \circ \Psi \circ \mathfrak{u}_\mu \in \Gamma(W, \mathcal{H}_\Lambda)$ für $\mu = 1,\dots,q$.
Dann ist (W,s) mit $s := (s_1,\dots,s_q)$ eine lokale Liftung von Ψ, und für $\varphi_{(W,s)} = (\mathrm{pr}_1, \mathrm{ev} \circ (s^T \times \mathrm{id})) : W \times \mathbb{C} \to W \times \mathbb{C}^q$ gilt: $\varphi_{(W,s)} \circ \theta = \iota$, wobei $\iota : L_W \hookrightarrow W \times \mathbb{C}^q$ die kanonische Injektion ist.

Sei andererseits $t_\mu := \Psi \circ \mathfrak{u}_\mu \in \Gamma(U, \mathcal{F}) \subset \Gamma(U, \mathcal{H}_X)$ für $\mu = 1,\dots,q$, $t := (t_1,\dots,t_q)$ und $\chi := (\mathrm{id}, t^T) : U \to U \times \mathbb{C}^q$. Dann gilt über W:

$$\chi = (\mathrm{id}, s^T) = (\mathrm{id}, \mathrm{ev} \circ (s^T \times 1)) = \varphi_{(W,s)} \circ \eta = \varphi_{(W,s)} \circ \theta \circ \xi = \iota \circ \xi .$$

Sei $(f_1,\dots,f_q) \in \mathrm{Im}\, \Psi_*$. Dann ist $\hat{\chi}_x(\sum_{\mu=1}^{q} (f_\mu)_x \hat{\otimes} z_\mu) = \sum_{\mu=1}^{q} (f_\mu)_x (t_\mu)_x$.
wegen $(\mathrm{Im}\, \Psi)_x = (\mathrm{Ker}\, \Psi)_x$ folgt: $0 = \Psi((f_1)_x,\dots,(f_q)_x) = \Psi((\sum_{\mu=1}^{q} f_\mu \mathfrak{u}_\mu)_x) =$
$= \sum_{\mu=1}^{q} (f_\mu)_x (t_\mu)_x$. Daher induziert χ eine Abbildung $\varepsilon : U \to L_U$ mit $\iota \circ \varepsilon = \chi$.
Es ist $\pi \circ \varepsilon = \mathrm{pr}_1 \circ \iota \circ \varepsilon = \mathrm{pr}_1 \circ \chi = \mathrm{id}$, also $\varepsilon \in \Gamma(U, L)$. Außerdem ist $\iota \circ \varepsilon | W = \iota \circ \xi | W$, also $\varepsilon | W = \xi | W$. Das bedeutet, daß man die Schnittfläche ξ auf ganz X definieren kann.

Über W ist außerdem $\iota \circ \xi \circ j = \chi \circ j = (j, 0) = 0_{W \cap Y} \circ j = \iota \circ \omega_L \circ j$. Also ist $\xi \circ j = \omega_L \circ j$. ▼

Ist X ein komplexer Raum und $\mathcal{F}$ eine lokal-freie $\mathcal{H}_\Lambda$-Garbe, so ist $\mathcal{F}$ auch kohärent, und der zugehörige lineare Raum $\mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ ist ein Vektorbündel. In diesem Fall ist aber ein anderes Konstruktionsverfahren üblich:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so daß zu jedem $i \in I$ ein Garbenisomorphismus $\Psi_i : q\mathcal{H}_X | U_i \to \mathcal{F} | U_i$ existiert. Dann setzt man

$g_{ik}^{\nu\mu} := \mathrm{pr}_\nu \circ \Psi_i^{-1} \circ \Psi_k \circ \mathfrak{u}_\mu \in \Gamma(U_i \cap U_k, \mathcal{H}_X)$ und

$g_{ik} := (g_{ik}^{\nu\mu} | \nu, \mu = 1,\dots,q) \in \mathrm{Hol}(U_i \cap U_k, M_{q,q}(\mathbb{C}))$.

Es folgt unmittelbar, daß g_{ii} die Einheitsmatrix über U_i ist, und daß $g_{ik} \cdot g_{kl} = g_{il}$ über $U_i \cap U_k \cap U_l$ ist. Insbesondere ist $g_{ik} \in \mathrm{Hol}(U_i \cap U_k, GL(q,\mathbb{C}))$ mit $g_{ik}^{-1} = g_{ki}$.

Sei nun $\mathrm{Vec}_i(\mathcal{F}) := U_i \times \mathbb{C}^q$, $\pi_i := \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Vec}_i(\mathcal{F}) \to U_i$.
$\mathrm{Vec}_i(\mathcal{F})$ ist ein trivialer linearer Raum über U_i, und durch $\theta_{ik} :=$
$= (\mathrm{pr}_1, \mathrm{ev} \circ (g_{ik} \times \mathrm{id}))$ wird ein Isomorphismus $\theta_{ik} : \mathrm{Vec}_k(\mathcal{F})_{U_i \cap U_k} \to \mathrm{Vec}_i(\mathcal{F})_{U_i \cap U_k}$ von linearen Räumen definiert, der offensichtlich die Bedingung $\theta_{ik} \circ \theta_{kl} =$
$= \theta_{il}$ über $U_i \cap U_k \cap U_l$ erfüllt.

Nach Satz II.1.8. gibt es einen linearen Raum $\pi : \mathrm{Vec}(\mathcal{F}) \to X$ und Isomorphismen $\varphi_i : \mathrm{Vec}(\mathcal{F})_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^q$ mit $\theta_{ik} = \varphi_i \circ \varphi_k^{-1}$. $\mathrm{Vec}(\mathcal{F})$ ist damit ein Vektorbündel vom Rang q.

Der Funktor, den man auf diese Weise erhält, ist allerdings kovariant, es stellt sich heraus, daß $\mathrm{Vec}(\mathcal{F}) = \mathrm{Lin}(\mathcal{F})^*$ ist.

§ 2 Das Tangentialbündel eines linearen komplexen Faserraumes

Aus der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist bekannt, daß das Tangentialbündel eines Vektorbündels eine besonders interessante geometrische Struktur aufweist. In gewissem Maße überträgt sich das auch auf lineare Räume.

II.2.1.Definition: Für einen Bereich $B \subset \mathbb{C}^n$ bezeichne $\Lambda_B : B \times \mathbb{C}^n \to T(B)$ den durch $(\Lambda_B)_z(z,u)(f) := (Df)_z(u)$ definierten kanonischen Isomorphismus von Vektorbündeln. $J : (B \times \mathbb{C}^q) \times_B (B \times \mathbb{C}^q) \to B \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q$ und $R : B \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q \to (B \times \mathbb{C}^q) \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q)$ seien definiert durch $J((z,v),(z,w)) := (z,v,w)$ und $R(z,v,w) := ((z,v),(0,w))$.
Schließlich sei $H_{B \times \mathbb{C}^q} := \Lambda_{B \times \mathbb{C}^q} \circ R \circ J : (B \times \mathbb{C}^q) \times_B (B \times \mathbb{C}^q) \to T(B \times \mathbb{C}^q)$.

II.2.2.Lemma: Zu jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\lambda_V : V \times V \to T(V)$ von Vektorbündeln über V, so daß für jeden Vektorraumisomorphismus $\phi : V \to \mathbb{C}^q$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{\lambda_V} & T(V) \\ {\scriptstyle \phi \times \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\phi)} \\ \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q & \xrightarrow{\Lambda_{\mathbb{C}^q}} & T(\mathbb{C}^q) \end{array}$$

Der Beweis ist trivial.

Sei nun X ein komplexer Raum, es gebe einen Bereich $B \subset \mathbb{C}^n$ (mit Koordinaten $z_1,\dots,z_n$) und holomorphe Funktionen $F_1,\dots,F_k$ auf B, so daß $\mathcal{F}_X := (F_1,\dots,F_k)$ eine Einbettung $j : X \hookrightarrow B$ definiert.
Dann ist $\Omega_X = (\Omega_B/(\mathcal{H}_B d\mathcal{F}_X + \mathcal{F}_X d\Omega_B))\big|\underline{X}$. Über X hat man eine kanonische Projektion $q_{B,X} : \Omega_B \to \Omega_B/(\mathcal{H}_B d\mathcal{F}_X + \mathcal{F}_X d\Omega_B) = \Omega_X$.
Die exakte Sequenz $k\mathcal{H}_X \xrightarrow{\mathcal{E}_X} n\mathcal{H}_X \xrightarrow{\mathcal{T}_X} \Omega_X \to 0$ sei definiert durch

$$\tau_X(b_1,\dots,b_n) := \sum_{\iota=1}^{n} b_\iota q_{B,X}(dz_\iota) \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_X(c_1,\dots,c_k) := \Big(\sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa \cdot \frac{\partial F_\varkappa}{\partial z_1},\dots,\sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa \cdot \frac{\partial F_\varkappa}{\partial z_n}\Big).$$

(Die Exaktheit ist sehr leicht nachzuweisen)

Es sei $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, so daß eine lineare Einbettung $\varphi : E \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^q$ existiert. Dann kann man annehmen, daß über X eine exakte Sequenz

$$p\mathcal{H}_X \xrightarrow{\alpha} q\mathcal{H}_X \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

mit $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) = E$ und $\mathrm{Lin}(\beta) = \varphi$ gegeben ist.
Sei $\beta(1\!\!1_\mu^{(q)}) = s_\mu \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ für $\mu = 1,\ldots,q$ und $\alpha(1\!\!1_\nu^{(p)}) = \sum_{\mu=1}^{q} g_{\nu\mu}\, 1\!\!1_\mu^{(q)}$ mit $g_{\nu\mu} \in \Gamma(X, \mathcal{H}_X)$ für $\nu = 1,\ldots,p$. Schließlich sei vorausgesetzt, daß es holomorphe Funktionen $G_{\nu\mu} \in \Gamma(B, \mathcal{H}_B)$ mit $G_{\nu\mu} \bmod (F_1,\ldots,F_k) = g_{\nu\mu}$ gibt. Lokal kann man dies alles stets erreichen!

II.2.3.Satz: Unter den obigen Voraussetzungen gibt es einen eindeutig bestimmten Garbenhomomorphismus $\varrho_E^{(\varphi)} : \Omega_E \to \pi^*\mathcal{F}$, so daß mit $H_E^{(\varphi)} := \mathrm{Lin}(\varrho_E^{(\varphi)}) : \pi^*E = E \times_X E \to T(E)$ und der kanonischen Abbildung $\eta_{A,B} : (X\times\mathbb{C}^q) \times_X (X\times\mathbb{C}^q) \hookrightarrow (X\times\mathbb{C}^q) \times_B (X\times\mathbb{C}^q)$ folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \xhookrightarrow{\left[(j\times id)\times_B(j\times id)\right]\circ\eta_{X,B}\circ(\varphi\times_X\varphi)} & (B\times\mathbb{C}^q)\times_B(B\times\mathbb{C}^q) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle H_E^{(\varphi)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H_{B\times\mathbb{C}^q}} \\ T(E) & \xhookrightarrow{T((j\times id)\circ\varphi)} & T(B\times\mathbb{C}^q) \end{array}$$

Beweis: Da $T((j\times id)\circ\varphi)$ eine Einbettung ist, folgt die Eindeutigkeit aus der Kommutativität des Diagramms. Es bleibt die Existenz zu zeigen.
Es gibt folgende exakte Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} p\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\alpha^{(E)}} & q\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\beta^{(E)}} & \pi^*\mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \varrho} & & & & \\ (p+k)\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\varepsilon_E} & (n+q)\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\tau_E} & \Omega_E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit $\alpha^{(E)}(e_1\otimes 1,\ldots,e_p\otimes 1) := (pr_1\circ\alpha(e_1,\ldots,e_p)\otimes 1,\ldots,pr_q\circ\alpha(e_1,\ldots,e_p)\otimes 1)$,

$\beta^{(E)}(a_1\otimes 1,\ldots,a_q\otimes 1) := \beta(a_1,\ldots,a_q)\otimes 1$,

$\varepsilon_E(c_1,\ldots,c_p,c_{p+1},\ldots,c_{p+k}) := (\sum_{\nu,\mu} c_\nu w_\mu \frac{\partial G_{\nu\mu}}{\partial z_1} + \sum_\varkappa c_{p+\varkappa}\frac{\partial F_\varkappa}{\partial z_1},\ldots,\sum_\nu c_\nu G_{\nu 1},\ldots)$,

$\tau_E(b_1,\ldots,b_n,b_{n+1},\ldots,b_{n+q}) := \sum_{\iota=1}^{n} b_\iota\, q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(dz_\iota) + \sum_{\mu=1}^{q} b_{n+\mu}\, q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(dw_\mu)$,

sowie $\varrho(b_1,\ldots,b_n,b_{n+1},\ldots,b_{n+q}) := (b_{n+1},\ldots,b_{n+q})$.

Sei $\tau_E(b_1,\ldots,b_n,b_{n+1},\ldots,b_{n+q}) = 0$. Dann gibt es ein $(c_1,\ldots,c_{p+k}) \in (p+k)\mathcal{H}_E$ mit $\varepsilon_E(c_1,\ldots,c_{p+k}) = (b_1,\ldots,b_{n+k})$. Daraus folgt:

$\beta^{(E)}\circ\varrho(b_1,\ldots,b_{n+q}) = \beta^{(E)}(b_{n+1},\ldots,b_{n+q}) = \beta^{(E)}(\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu G_{\nu 1},\ldots,\sum_{\nu=1}^{p} c_\nu G_{\nu q}) =$

$= \beta^{(E)}(\sum_{\nu=1}^{p}(g_{\nu 1},\ldots,g_{\nu q})\otimes c_\nu) = \sum_{\nu=1}^{p}\beta(g_{\nu 1},\ldots,g_{\nu q})\otimes c_\nu = \sum_{\nu=1}^{p}\beta\circ\alpha(1\!\!1_\nu^{(p)})\otimes c_\nu = 0.$

Also induziert φ einen Homomorphismus $\varphi_E^{(\varphi)} : \mathcal{Q}_E \to \pi^*\mathcal{F}$ mit $\beta^{(E)} \circ \varphi = \varphi_E^{(\varphi)} \circ \tau_E$.

Wir weisen nun die Kommutativität des Diagramms nach:

$\iota_1 : \pi^*E \hookrightarrow E \times \mathbb{C}^q$ und $\iota_2 : T(E) \hookrightarrow E \times \mathbb{C}^{n+q}$ seien die durch $\beta^{(E)}$ bzw. τ_E induzierten linearen Einbettungen,

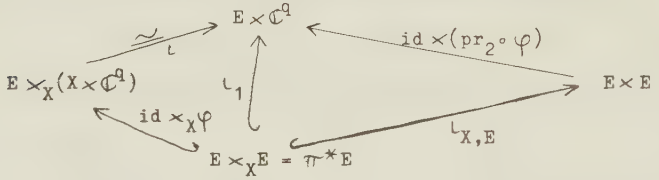
$\iota_X : (X \times \mathbb{C}^q) \times_X (X \times \mathbb{C}^q) \hookrightarrow (X \times \mathbb{C}^q) \times (X \times \mathbb{C}^q)$, $\iota_B : (B \times \mathbb{C}^q) \times_B (B \times \mathbb{C}^q) \hookrightarrow (B \times \mathbb{C}^q) \times (B \times \mathbb{C}^q)$

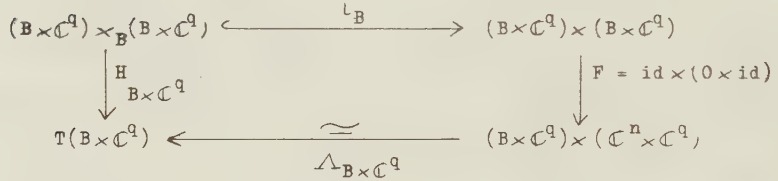
und $\iota_{X,E} : E \times_X E \hookrightarrow E \times E$ seien die kanonischen Injektionen,

$\iota : E \times_X (X \times \mathbb{C}^q) \xrightarrow{\sim} E \times \mathbb{C}^q$ der kanonische Isomorphismus.

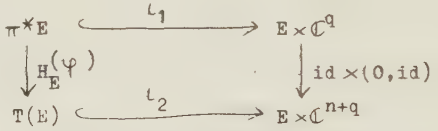
Außerdem sei $F : (B \times \mathbb{C}^q) \times (B \times \mathbb{C}^q) \to (B \times \mathbb{C}^q) \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q)$ definiert durch $r(z,v,z',w) := (z,v,0,w)$.

Trivialerweise hat man folgende kommutative Diagramme:

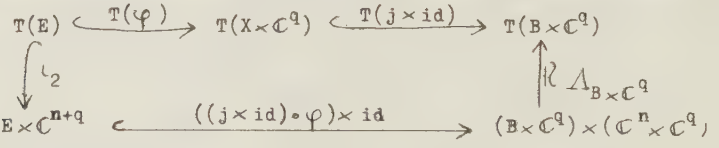




Die Abbildung $H_E^{(\varphi)}$ wird durch folgendes Diagramm definiert:



Außerdem kann man leicht zeigen, daß folgendes Diagramm kommutativ ist:



Faßt man dies alles zusammen, so erhält man:

$$H_{B \times \mathbb{C}^q} \circ \left[(j \times id) \times_B (j \times id)\right] \circ \eta_{X,B} \circ (\varphi \times_X \varphi) =$$

$$= \Lambda_{B \times \mathbb{C}^q} \circ F \circ \iota_B \circ \left[(j \times id) \times_B (j \times id)\right] \circ \eta_{X,B} \circ (\varphi \times_X \varphi) =$$

$$= \Lambda_{B \times \mathbb{C}^q} \circ F \circ \left[(j \times id) \times (j \times id)\right] \circ \iota_X \circ (\varphi \times_X \varphi) =$$

$= \Lambda_{B\times\mathbb{C}^q} \circ \left[(j\times id)\times(0\times id)\right] \circ (\varphi\times\varphi) \circ \iota_{X,E} =$

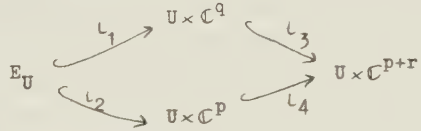
$= \Lambda_{B\times\mathbb{C}^q} \circ \left[((j\times id)\circ\varphi)\times(0,id)\right] \circ (id\times(pr_2\circ\varphi)) \circ \iota_{X,E} =$

$= \Lambda_{B\times\mathbb{C}^q} \circ \left[((j\times id)\circ\varphi)\times id\right] \circ (id\times(0,id)) \circ \iota_1 =$

$= \Lambda_{B\times\mathbb{C}^q} \circ \left[((j\times id)\circ\varphi)\times id\right] \circ \iota_2 \circ H_E^{(\varphi)} = T(j\times id)\circ T(\varphi)\circ H_E^{(\varphi)},$

und das war zu zeigen. ▼

II.2.4.Lemma: Sei E ein linearer Raum über X, $\iota_1 : E \hookrightarrow X\times\mathbb{C}^q$ und $\iota_2 : E \hookrightarrow X\times\mathbb{C}^p$ lineare Einbettungen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in \underline{X}$ einen offenen Teilraum $U \subset X$ mit $x_0 \in \underline{U}$ und lineare Einbettungen $\iota_3 : U\times\mathbb{C}^q \hookrightarrow U\times\mathbb{C}^{p+r}$, $\iota_4 : U\times\mathbb{C}^p \hookrightarrow U\times\mathbb{C}^{p+r}$ mit $\iota_4 = (id\times(id,0))$ und einem geeigneten r, so daß folgendes Diagramm kommutiert:



Beweis: Über einem geeigneten U hat man exakte Sequenzen

$$ {}^r\mathcal{H}_X \xrightarrow{\alpha_1} {}^q\mathcal{H}_X \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{F} \to 0 $$

$$ {}^m\mathcal{H}_X \xrightarrow{\alpha_2} {}^p\mathcal{H}_X \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{F} \to 0 $$

(wobei $E = \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ und $\iota_1 = \mathrm{Lin}(\beta_1)$, $\iota_2 = \mathrm{Lin}(\beta_2)$ ist)
$\beta_3 : (p+r)\mathcal{H}_X \to {}^q\mathcal{H}_X$ und $\beta_4 : (p+r)\mathcal{H}_X \to {}^p\mathcal{H}_X$ seien definiert durch $\beta_3(\sigma,\tau) := \varphi(\sigma) + \alpha_1(\tau)$ und $\beta_4(\sigma,\tau) := \sigma$, wobei $\varphi : {}^p\mathcal{H}_X \to {}^q\mathcal{H}_X$ ein Homomorphismus mit $\beta_1\circ\varphi = \beta_2$ ist. Dann ist $\beta_1\circ\beta_3(\sigma,\tau) =$
$= \beta_1(\varphi(\sigma) + \alpha_1(\tau)) = \beta_2(\sigma) = \beta_2\circ\beta_4(\sigma,\tau)$.
β_4 ist offensichtlich ein Epimorphismus.
Sei $a \in {}^q\mathcal{H}_X$ vorgegeben. Dann gibt es ein $b \in {}^p\mathcal{H}_X$ mit $\beta_2(b) = \beta_1(a)$, also $\beta_1\circ\varphi(b) = \beta_1(a)$. Damit ist $\beta_1(a - \varphi(b)) = 0$ und es gibt ein $c \in {}^r\mathcal{H}_X$ mit $\alpha_1(c) = a - \varphi(b)$, also $a = \varphi(b) + \alpha_1(c) = \beta_3(b,c)$. β_3 ist auch ein Epimorphismus.
$\iota_3 := \mathrm{Lin}(\beta_3)$ und $\iota_4 := \mathrm{Lin}(\beta_4)$ leisten das Verlangte. ▼

II.2.5.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{H}_X$-Garbe, $E \xrightarrow{\pi} X$ der zugehörige lineare Raum. Dann gibt es einen Garbenhomomorphismus $\varrho_E : \Omega_E \to \pi^*\mathcal{F}$, so daß für die zugehörige lineare Abbildung $H_E : \pi^*E \to T(E)$ gilt:

1) Ist $E_U \hookrightarrow U\times\mathbb{C}^q$ eine lineare Einbettung, so ist $H_E = H_E^{(\varphi)}$ über U.

2) Für $x \in \underline{X}$ bezeichne $j_x : E_x \hookrightarrow E$ die kanonische Einbettung. Dann erhält man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_x \times E_x & \xrightarrow{(j_x \times j_x)} & E \times_X E \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_{E_x}} & & \downarrow{\scriptstyle H_E} \\ T(E_x) & \xrightarrow{T(j_x)} & T(E) \end{array}$$

Beweis: a) Für die Existenz von φ_E mit der Eigenschaft 1) genügt es zu zeigen, daß für je zwei lineare Einbettungen $E_U \overset{\varphi}{\hookrightarrow} U \times \mathbb{C}^q$, $E_U \overset{\psi}{\hookrightarrow} U \times \mathbb{C}^p$ gilt: $H_E^{(\varphi)} = H_E^{(\psi)}$.

Zunächst sei angenommen, daß dies schon für den Fall $\psi = \chi \circ \varphi$ mit einer linearen Einbettung $\chi : U \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^p$ bewiesen ist. Im allgemeinen Fall gibt es nach Lemma II.2.4. lineare Einbettungen $i_1 : U \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^{p+r}$ und $i_2 : U \times \mathbb{C}^p \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^{p+r}$ mit $i_1 \circ \varphi = i_2 \circ \psi$. Dann ist $H_E^{(\varphi)} = H_E^{(i_1 \circ \varphi)} = H_E^{(i_2 \circ \varphi)} = H_E^{(\psi)}$

b) Für den Beweis des Spezialfalles nehmen wir an, daß es eine lineare Einbettung $\varphi : E \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^q$ und eine Einbettung $j : X \hookrightarrow B$ in einen Bereich des $\mathbb{C}^n$ gibt. $\chi : X \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^p$ sei eine weitere lineare Einbettung. Zu $x_o \in \underline{X}$ gibt es eine Umgebung $U(x_o) \subset X$ und eine holomorphe Abbildung $M_\chi : U \to M_{p,q}(\mathbb{C})$ mit $\chi = (pr_1, ev \circ (M_\chi \times id))$. Also ist $\widetilde{\chi}(x_o, v) = (x_o, M_\chi(x_o) \cdot v)$ für $v \in \mathbb{C}^q$, und da χ_{x_o} linear und injektiv ist, liegt $M_\chi(x_o)$ in $M_{p,q}^q(\mathbb{C}) :=$
$= \{A \in M_{p,q}(\mathbb{C}) : \operatorname{rg} A = q\}$. Dann gibt es aber eine offene Umgebung $W(x_o) \subset U$, eine offene Teilmenge $B' \subset B$ mit $j(W) \subset B'$ und eine holomorphe Abbildung $M : B' \to M_{p,q}^q(\mathbb{C})$ mit $M \circ j = M_\chi$. O.B.d.A. kann man annehmen, daß $W = U = X$ und $B' = B$ ist. Dann ist $\Phi := (pr_1, ev \circ (M \times id)) : B \times \mathbb{C}^q \to B \times \mathbb{C}^p$ eine lineare Einbettung mit $\Phi \circ (j \times id) = (j \times id) \circ \chi$, und man erhält folgendes kommutative Diagramm:

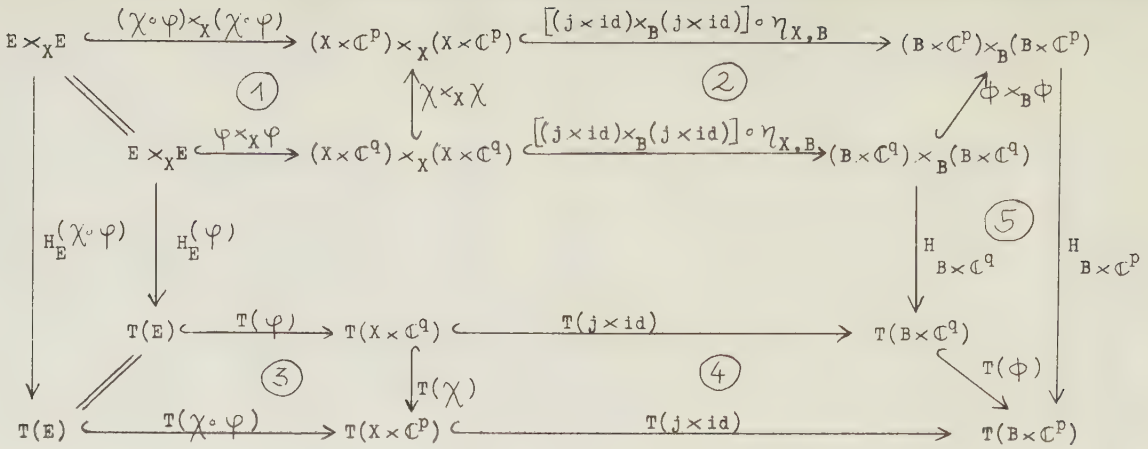
$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\varphi}{\nearrow} & X \times \mathbb{C}^q & \xrightarrow{j \times id} & B \times \mathbb{C}^q \\ E & & \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ & \underset{\chi \circ \varphi}{\searrow} & X \times \mathbb{C}^p & \xrightarrow{j \times id} & B \times \mathbb{C}^p \end{array}$$

Daraus gewinnt man ein großes Diagramm, aus dem sich ableiten läßt, daß $H_E^{(\varphi)} = H_E^{(\chi \circ \varphi)}$ ist (zu den Einzelheiten vgl. die nächste Seite).

Zusammen mit a) ergibt das die Existenz von φ_E.

c) Die Gleichung $H_E \circ (j_x \times j_x) = T(j_x) \circ \lambda_{E_x}$ läßt sich mit Hilfe einer Pseudotrivialisierung von E in x und einigen kanonischen kommutativen Diagrammen leicht verifizieren. ▼

Zum Beweis von Satz II.2.5.:



Es ist $T(\Phi)(z,v;u,w) = (z,M(z)\cdot v;u,\left[\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\partial M}{\partial z_\nu}(z)\right]\cdot w + M(z)\cdot w)$. Daraus folgt, daß $T(\Phi)\circ H_{B\times\mathbb{C}^q}(z,v;z,w) = T(\Phi)(z,v;0,w) = (z,M(z)\cdot v;0,M(z)\cdot w) = H_{B\times\mathbb{C}^p}(z,M(z)\cdot v;z,M(z)\cdot w) = H_{B\times\mathbb{C}^p}\circ(\Phi\times_B\Phi)(z,v;z,w)$, d.h., das Diagramm (5) ist kommutativ. Die Kommutativität der Diagramme (1), (2), (3), (4) ist trivial.

Da das innere und das äußere Rechteck nach Satz II.2.3. ebenfalls kommutativ sind, muß $H_E^{(\varphi)} = H_E^{(\chi\circ\varphi)}$ sein.

II.2.6.Definition:

a) Für $\omega = q_{B,X}(\sum_{\iota=1}^{n} a_\iota dz_\iota) \in \Omega_X$ definiert man

$$\pi^*\omega := q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(\sum_{\iota=1}^{n}(a_\iota\circ pr_1)d(z_\iota\circ pr_1)) \in \Omega_E.$$

b) Der Garbenhomomorphismus $\theta_E : \tau^*\Omega_X \to \Omega_E$ über E sei definiert durch

$$\theta_E(\omega\otimes a) := a\cdot(\pi^*\omega).$$

II.2.7.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{H}_X$-Garbe, $E \xrightarrow{\tau} X$ der dadurch definierte lineare Raum über X. Dann ist folgende Sequenz exakt:

$$\tau^*\Omega_X \xrightarrow{\theta_E} \Omega_E \xrightarrow{\varrho_E} \pi^*\mathcal{F} \to 0$$

Beweis: Es genügt, den lokalen Fall $X \hookrightarrow B$ und $E \hookrightarrow X\times\mathbb{C}^q$ zu betrachten. Die Bezeichnungen seien die gleichen wie bisher.

Man hat folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
(p+k)\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\varepsilon_E} & (n+q)\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\tau_E} & \Omega_E & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow\theta_E & & \\
k\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\varepsilon_X\otimes id} & n\mathcal{H}_E & \xrightarrow{\tau_X\otimes id} & \pi^*\Omega_X & & 0
\end{array}$$

Dabei sei $\theta(a_1,\ldots,a_n) := (a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0)$.

Es ist $\tau_E\circ\theta(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{\iota=1}^{n} a_\iota q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(dz_\iota) = \sum_{\iota=1}^{n} a_\iota \pi^* q_{B,X}(dz_\iota) =$

$= \theta_E(\sum_{\iota=1}^{n} q_{B,X}(dz_\iota)\otimes a_\iota) = \theta_E\circ(\tau_X\otimes id)(a_1,\ldots,a_n).$

1) Sei $s = \sum_i s_i\otimes a_i \in \pi^*\mathcal{F}$, $s_i = \beta(b_1^{(i)},\ldots,b_q^{(i)})$. Dann ist $s =$

$= \beta^{(E)}(\sum_i(b_1^{(i)},\ldots,b_q^{(i)})\otimes a_i)$, also $\varrho_E(\tau_E(\sum_i(0,\ldots,0,b_1^{(i)},\ldots,b_q^{(i)})\otimes a_i)) =$

$= \beta^{(E)}\circ\varrho(\sum_i(0,\ldots,0,b_1^{(i)},\ldots,b_q^{(i)})\otimes a_i) = \beta^{(E)}(\sum_i(b_1^{(i)},\ldots,b_q^{(i)})\otimes a_i) = s.$

Also ist ϱ_E ein Epimorphismus.

2) $\varrho_E\circ\theta_E((\tau_X\otimes id)(a_1,\ldots,a_n)) = \varrho_E\circ\tau_E\circ\theta(a_1,\ldots,a_n) =$

$= \varrho_E\circ\tau_E(a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0) = \beta^{(E)}\circ\varrho(a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0) =$

$= \beta^{(E)}(0,\ldots,0) = 0$, also $\varrho_E\circ\theta_E = 0$.

3) Sei $0 = \varrho_E(\tau_E(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+q})) = \beta^{(E)}(a_{n+1},\ldots,a_{n+q})$.

Dann gibt es ein $(c_1,\ldots,c_p)$ mit $(a_{n+1},\ldots,a_{n+q}) = \alpha^{(E)}(c_1,\ldots,c_p) =$

$= \alpha^{(E)}(\sum_{\nu=1}^{p} 1\!\!1_\nu^{(p)}\otimes c_\nu) = \sum_{\nu=1}^{p}\alpha(1\!\!1_\nu^{(p)})\otimes c_\nu = \sum_{\mu=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{p} g_{\nu\mu}\,1\!\!1_\mu^{(q)}\otimes c_\nu =$

$= (\sum_{\nu=1}^{p} g_{\nu 1} c_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{p} g_{\nu q} c_\nu)$.

Man setze $b_\iota := a_\iota - \sum_{\nu,\mu} c_\nu \frac{\partial G_{\nu\mu}}{\partial z_\iota} w_\mu$ für $\iota = 1,\ldots,n$.

Dann ist $\Theta_E((\tau_X \otimes \mathrm{id})(b_1,\ldots,b_n)) = \tau_E \circ \Theta(b_1,\ldots,b_n) =$

$= \sum_{\iota=1}^{n} a_\iota q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(dz_\iota) - \sum_{\iota=1}^{n} \sum_{\nu,\mu} c_\nu \frac{\partial G_{\nu\mu}}{\partial z_\iota} w_\mu q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(dz_\iota) =$

$= \tau_E(a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0) - \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(d(\sum_\mu G_{\nu\mu} w_\mu) - \sum_\mu G_{\nu\mu} dw_\mu) =$

$= \tau_E(a_1,\ldots,a_n,0,\ldots,0) + \tau_E(0,\ldots,0,a_{n+1},\ldots,a_{n+q}) - \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu q_{B\times\mathbb{C}^q,E}(d(\sum_\mu G_{\nu\mu} w_\mu))$

$= \tau_E(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots,a_{n+q})$. Also ist die Sequenz exakt bei Ω_E. ▼

II.2.8.Definition: $K_E : T(E) \to \pi^*T(X)$ sei die durch Θ_E induzierte lineare Abbildung. Dann heißt $T(E/X) := \mathrm{Ker}(K_E)$ das relative Tangentialbündel von E über X.
(Ist $E \xrightarrow{\varphi} E'$ ein Homomorphismus von linearen Räumen über X, so ist $\mathrm{Ker}\ \varphi := \varphi^{-1}(\omega_{E'}(X))$ stets ein linearer Raum. Der Beweis dafür ist nicht schwer)

II.2.9.Satz: Sei $j_{E/X} : T(E/X) \hookrightarrow T(E)$ die kanonische Injektion. Dann gibt es einen Isomorphismus $\overline{H}_E : \pi^*E \to T(E/X)$ von linearen Räumen mit

$$j_{E/X} \circ \overline{H}_E = H_E : \pi^*E \to T(E).$$

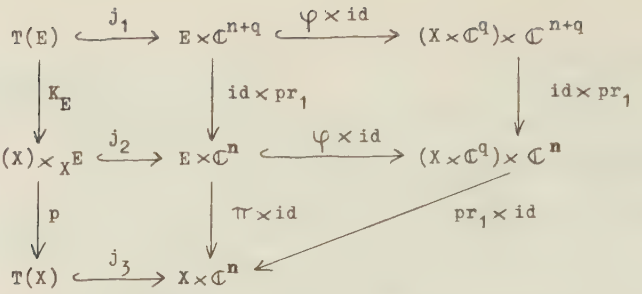
Beweis: Man beachte, daß die Kategorie der linearen Räume und die Kategorie der kohärenten Garben dual zueinander sind. Aus der exakten Sequenz

$$\pi^*\Omega_X \xrightarrow{\Theta_E} \Omega_E \xrightarrow{\varsigma_E} \pi^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

erhält man einen Isomorphismus $\overline{\varsigma}_E : \mathrm{Coker}\ \Theta_E = \Omega_E/\mathrm{Ker}\ \varsigma_E \xrightarrow{\cong} \pi^*\mathcal{F}$
mit $\overline{\varsigma}_E \circ q = \varsigma_E$ für die kanonische Projektion $q : \Omega_E \to \Omega_E/\mathrm{Ker}\ \varsigma_E$.
Da $\mathrm{Lin}(\mathrm{Coker}\ \Theta_E) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Lin}\ \Theta_E) = \mathrm{Ker}\ K_E = T(E/X)$ ist,
ist $\overline{H}_E := \mathrm{Lin}(\overline{\varsigma}_E) : \pi^*E \to T(E/X)$ ein Isomorphismus mit $j_{E/X} \circ \overline{H}_E =$
$= \mathrm{Lin}(q) \circ \mathrm{Lin}(\overline{\varsigma}_E) = \mathrm{Lin}(\overline{\varsigma}_E \circ q) = \mathrm{Lin}(\varsigma_E) = H_E$. ▼

II.2.10.Satz: $p : \pi^*T(X) = T(X) \times_X E \to T(X)$ sei die kanonische Abbildung. Dann ist $p \circ K_E = T(\pi) : T(E) \to T(X)$.

Beweis: $j_1 : T(E) \hookrightarrow E \times \mathbb{C}^{n+q}$, $j_2 : T(X) \times_X E \hookrightarrow E \times \mathbb{C}^n$ und $j_3 : T(X) \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^n$ seien die kanonischen Injektionen.
Man kann sich leicht überlegen, daß folgendes Diagramm kommutiert:



Daraus folgt: $j_3 \circ p \circ K_E = (pr_1 \times id) \circ (id \times pr_1) \circ (\varphi \times id) \circ j_1 = (\pi \times pr_1) \circ j_1 = j_3 \circ T(\pi)$, also $p \circ K_E = T(\pi)$. ▼

Ist $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, so hat man zu jedem $v \in \underline{E}$ eine kanonische Injektion $(H_E)_v : E_{\widetilde{\pi}(v)} \hookrightarrow T_{E,v}$ mit $\mathrm{Im}(H_E)_v = T(E/X)_v = \{\xi \in T_{E,v} : T_v(\pi)(\xi) = 0\}$.

Sei $x := \widetilde{\pi}(v)$. Folgende Sequenz von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist exakt:

$$0 \longrightarrow E_x \xrightarrow{(H_E)_v} T_{E,v} \xrightarrow{T_v(\pi)} T_{X,x}$$

Setzt man $B_v(E) := \mathrm{Im}\, T_v(\pi) \subset T_{X,x}$, so erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_x \longrightarrow T_{E,v} \longrightarrow B_v(E) \longrightarrow 0$$

Jede Pseudotrivialisierung $\varphi : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ von E in x definiert eine Spaltung der Sequenz in folgender Weise:

Ist $j_x : E_x \hookrightarrow E_U$ die kanonische Injektion, so ist $\varphi_x := pr_2 \circ \varphi \circ j_x : E_x \longrightarrow \mathbb{C}^q$ ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

$\Phi_v^{(\varphi)} : T_{E,v} \longrightarrow E_x \oplus B_v(E)$ wird nun definiert durch $\Phi_v^{(\varphi)}(\xi) := (\varphi_x^{-1} \circ pr_2 \circ T_v(\varphi)(\xi), T_v(\pi)(\xi))$. $\Phi_v^{(\varphi)}$ ist eine lineare Abbildung zwischen gleichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Es genügt daher, die Injektivität von $\Phi_v^{(\varphi)}$ zu zeigen: Ist $\Phi_v^{(\varphi)}(\xi) = (0,0)$, so ist $T_v(\pi)(\xi) = 0$ und $0 = \varphi_x^{-1} \circ pr_2 \circ T_v(\varphi)(\xi)$, also $T_v(\varphi)(\xi) = (T_v(\pi)(\xi), 0) = (0,0)$. Da φ eine Einbettung ist, folgt, daß $\xi = 0$ ist.

Setzt man noch $B_v^{(\varphi)}(E) := (\Phi_v^{(\varphi)})^{-1}(B_v(E)) \subset T_{E,v}$, so erhält man:

$$T_{E,v} = T(E/X)_v \oplus B_v^{(\varphi)}(E)$$

Wir nennen das die zu φ gehörende Aufspaltung von $T_{E,v}$.

§ 3 Unitäre lineare Räume

Vorbemerkung: In der Kategorie der differenzierbaren Räume existieren Produkte und Faserprodukte (vgl. [17]). Man kann leicht zeigen, daß $D(X \times_Z Y) = D(X) \times_{D(Z)} D(Y)$ ist. Für holomorphe Abbildungen gelten entsprechende Verträglichkeitsregeln.

Die Abbildung $Ev : GL(q,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $Ev(A,v,w) := v^T \cdot A \cdot \bar{w}$. Für einen komplexen Raum X sei $J_X^q : (X \times \mathbb{C}^q) \times_X (X \times \mathbb{C}^q) \to X \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q$ der kanonische Isomorphismus mit $\tilde{J}_X^q((x,v),(x,w)) = (x,w,w)$.

II.3.1.Definition: Sei $(E, \pi, \times, \beta, \omega_E)$ ein linearer Raum über X. Unter einer hermiteschen Form auf E versteht man eine differenzierbare Abbildung $h : E \times_X E \to \mathbb{C}$, so daß gilt:

Zu jedem $x \in \underline{X}$ gibt es einen offenen Teilraum $U \subset X$ mit $x \in \underline{U}$, eine lineare Einbettung $\varphi : \pi^{-1}(U) \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ und eine differenzierbare Abbildung $H : U \to GL(q,\mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $h|E \times_U E = Ev \circ (H \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi \times_U \varphi)$.

b) $H^T = c \circ H$.

II.3.2.Satz: Sei E ein linearer Raum über X, h eine hermitesche Form auf E. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion χ_h auf E mit $\chi_h|\omega_E(X) = 0$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Delta} & E \times_X E \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_h} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & \mathbb{C} \end{array}$$

Beweis: Über U sei $h = Ev \circ (H \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi \times_U \varphi)$. $\Delta^* : U \times \mathbb{C}^q \to U \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^q$ sei die kanonische Abbildung mit $\widetilde{\Delta^*}(x,z) = (x,z,z)$, ε_1, $\varepsilon_2 : GL(q,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}$ seien definiert durch $\varepsilon_1(A,z) := z^T \cdot A \cdot \bar{z}$, $\varepsilon_2(A,z) := \bar{z}^T \cdot A \cdot z$. Schließlich sei $t : GL(q,\mathbb{C}) \to GL(q,\mathbb{C})$ definiert durch $t(A) := A^T$. Dann gilt offensichtlich:

$\varepsilon_2 \circ (t \times id) = \varepsilon_1$, $c \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \circ (c \times id)$ und $Ev \circ (id \times \Delta) = \varepsilon_1$.

Daraus folgt: $h \circ \Delta = Ev \circ (H \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi \times_U \varphi) \circ \Delta = Ev \circ (H \times id \times id) \circ \Delta^* \circ \varphi =$
$= Ev \circ (id \times \Delta) \circ (H \times id) \circ \varphi = \varepsilon_1 \circ (H \times id) \circ \varphi$, also $c \circ (h \circ \Delta) = c \circ \varepsilon_1 \circ (H \times id) \circ \varphi =$
$= \varepsilon_2 \circ (c \times id) \circ (H \times id) \circ \varphi = \varepsilon_2 \circ (t \times id) \circ (H \times id) \circ \varphi = \varepsilon_1 \circ (H \times id) \circ \varphi = h \circ \Delta$.

Nach Satz I.1.13. folgt hieraus die Existenz von χ_h mit $id \circ \chi_h = h \circ \Delta$. Wegen $id \circ \chi_h \circ \omega_E = h \circ \Delta \circ \omega_E = \varepsilon_1 \circ (H \times id) \circ \varphi \circ \omega_E = \varepsilon_1 \circ (H \times id) \circ 0_U =$ $= \varepsilon_1 \circ (id \times 0) \circ (H \times id) = 0$ ist $\chi_h | \omega_E(X) = 0$. ▼

II.3.3.Definition: Sei $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum und h eine hermitesche Form auf E. h heißt ein Skalarprodukt, falls $\chi_h(v) > 0$ für alle $v \in E - \underline{\omega(X)}$ ist. (E,h) nennt man dann einen unitären linearen Raum.

Für den Fall, daß $E \xrightarrow{\pi} X$ ein Vektorbündel vom Rang q ist, erhält man eine noch etwas handlichere Charakterisierung des Begriffes "Skalarprodukt":

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so daß es Trivialisierungen $\varphi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^q$ und holomorphe Abbildungen $g_{ik} : U_i \cap U_k \to GL(q, \mathbb{C})$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1) $pr_1 \circ \varphi_i = \pi$.
2) $g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$.
3) $pr_2 \circ \varphi_i \circ \varphi_k^{-1} = ev \circ (g_{ik} \times id)$.

Die Einheitsvektoren im $\mathbb{C}^q$ seien mit $1\!\!1_1, \ldots, 1\!\!1_q$ bezeichnet. Für $i \in I$ ist dann $\{e_1^{(i)}, \ldots, e_q^{(i)}\}$ mit $e_\nu^{(i)} := \varphi_i^{-1} \circ (id, 1\!\!1_\nu)$ eine Basis des $\Gamma(U_i, \mathcal{H}_X)$-Moduls $\Gamma(U_i, E)$. Ist $U \subset X$ offen, $\xi \in \Gamma(U,E)$, so setzt man $\xi^{(i)} := pr_2 \circ \varphi_i \circ \xi \in$ $\in Hol(U \cap U_i, \mathbb{C}^q)$ für $i \in I$.

II.3.4.Satz:

a) Sei h ein Skalarprodukt auf E, $h_i := (h_{\nu\mu}^{(i)} \mid \nu, \mu = 1, \ldots, q)$ mit $h_{\nu\mu}^{(i)} := h \circ (e_\nu^{(i)}, e_\mu^{(i)}) \in D(U_i, \mathbb{C})$. Dann gilt:
   α) $h_i \in D(U_i, GL(q, \mathbb{C}))$ mit $h_i^T = \overline{h}_i$.
   β) Für $x \in U_i$ und $w \in \mathbb{C}^q - \{0\}$ ist $w^T \cdot h_i(x) \cdot \overline{w} > 0$.
   γ) Über $U_i \cap U_k$ ist $h_k = g_{ik}^T \cdot h_i \cdot \overline{g}_{ik}$.
   δ) Ist $U \subset X$ offen, $\xi, \eta \in \Gamma(U,E)$, so ist $h \circ (\xi, \eta) = (\xi^{(i)})^T \cdot h_i \cdot \overline{\eta}^{(i)}$ über $U \cap U_i$.

b) Ist umgekehrt ein System $(h_i)_{i \in I}$ von Elementen von $D(U_i, M_{q,q}(\mathbb{C}))$ mit $\alpha) \beta) \gamma)$ gegeben, so existiert genau ein Skalarprodukt h auf E, welches $\delta)$ erfüllt.

Beweis: a) Sei h gegeben, h_i wie oben definiert. Dann ist $\overline{h}_{\nu\mu}^{(i)} = c \circ h \circ (e_\nu^{(i)}, e_\mu^{(i)}) =$ $= c \circ Ev \circ (H, e_\nu, e_\mu) = Ev \circ (c \times c \times c) \circ (H, e_\nu, e_\mu) = Ev \circ (t \times c \times c) \circ (H, e_\nu, e_\mu) =$ $= Ev \circ (id \times \tau) \circ (H, e_\nu, e_\mu) = Ev \circ (H, e_\mu, e_\nu) = h \circ (e_\mu^{(i)}, e_\nu^{(i)}) = h_{\mu\nu}^{(i)}$, wenn man mit

τ die "Tauschabbildung" $(v,w)\mapsto(w,v)$ und mit e_ν die Abbildung $e_\nu := pr_2\circ\varphi_i\circ e_\nu^{(i)}$ bezeichnet. Also ist $h_i^T = \overline{h}_i$.

Ist $U\subset X$ offen, und sind $\xi,\eta\in\Gamma(U,E)$, so folgt allgemeiner: $h\circ(\xi,\eta) = c\circ h\circ(\eta,\xi)$. Ist auch noch $\xi'\in\Gamma(U,E)$ und $f\in\Gamma(U,\mathcal{H}_X)$, so ist $h\circ(\xi+\xi',\eta) = h\circ(\xi,\eta) + h\circ(\xi',\eta)$ und $h\circ(f\cdot\xi,\eta) = f\cdot h(\xi,\eta)$. Damit erhält man:

$h\circ(\xi,\eta) = \sum_{\nu,\mu}\xi_\nu^{(i)}\overline{\eta}_\mu^{(i)}\, h\circ(e_\nu^{(i)},e_\mu^{(i)}) = (\xi^{(i)})^T\bullet h_i\bullet\overline{\eta}^{(i)}$. Das ist die Eigenschaft δ). Hieraus folgt Eigenschaft β), und - da $GL(q,\mathbb{C})\subset M_{q,q}(\mathbb{C})$ offen ist - auch Eigenschaft α). Durch eine triviale Rechnung erhält man schließlich γ).

b) Es sei ein System $(h_i)_{i\in I}$ mit den Eigenschaften α) β) und γ) gegeben.

Man definiert $h_i^* : E\times_{U_i}E\to\mathbb{C}$ durch $h_i^* := Ev\circ(h_i\times id\times id)\circ J^q_{U_i}\circ(\varphi_i\times_{U_i}\varphi_i)$.

Es ist eine ebenso langweilige wie langwierige Aufgabe, nachzurechnen, daß es eine differenzierbare Abbildung $h : E\times_X E\to\mathbb{C}$ mit $h|E\times_{U_i}E = h_i^*$ gibt. h ist dann in der Tat eine hermitesche Form auf E, die δ) erfüllt.

Sei h^* eine weitere hermitesche Form auf E, so daß $h^*\circ(\xi,\eta) = (\xi^{(i)})^T\bullet h_i\bullet\overline{\eta}^{(i)}$ für alle ξ,η ist. Es gibt ein $U\subset U_i$ und ein differenzierbares $H^* : U\to GL(q,\mathbb{C})$, so daß $t\circ H^* = c\circ H^*$ und $h^* = Ev\circ(H^*\times id\times id)\circ J^q_U\circ(\varphi_i\times_U\varphi_i)$ über U ist. Nun folgt: $H^* = (H^*_{\nu\mu}\,|\,\nu,\mu = 1,\dots,q)$ mit $H^*_{\nu\mu} = Ev\circ(H^*\times 1_\nu\times 1_\mu) =$

$= Ev\circ(H^*\times id\times id)\circ J^q_U\circ(\varphi_i\times_U\varphi_i)\circ(e_\nu^{(i)},e_\mu^{(i)}) = h^*\circ(e_\nu^{(i)},e_\mu^{(i)}) = (e_\nu^{(i)})^T\bullet h_i\bullet\overline{e}_\mu^{(i)} =$

$= h\circ(e_\nu^{(i)},e_\mu^{(i)}) = h^{(i)}_{\nu\mu}$, also $H^* = h_i$. Damit ist $h = h^*$, h ist eindeutig bestimmt.

Sei $v\in E - \underline{\omega(X)}$. Dann gibt es ein $i\in I$ mit $x_o := \widetilde{\pi}(v)\in U_i$, und es ist $\widetilde{\varphi_i}(v) = (x_o,v^{(i)})$ mit $v^{(i)}\in\mathbb{C}^q - \{0\}$. Sei $\xi := \varphi_i^{-1}\circ(id,v^{(i)})$. Dann ist $\xi\in\Gamma(U_i,E)$ und $\widetilde{\xi}(x_o) = v$, also $\chi_h(v) = \widetilde{\chi_{h\circ\xi}}(x_o) = \widetilde{h\circ\Delta\circ\xi}(x_o) =$

$= \widetilde{h\circ(\xi,\xi)}(x_o) = (v^{(i)})^T\bullet h_i(x_o)\bullet\overline{v}^{(i)} > 0$. ▼

Beispiele:

1) Die Koordinaten des $\mathbb{C}^{n+1}$ seien mit $z_o,\dots,z_n$ bezeichnet, $(U_i,\varphi_i), i = 0,\dots,n$, seien die kanonischen Koordinatensysteme des $\mathbb{P}^n$, mit $U_i = \{\langle z\rangle\in\mathbb{P}^n : z_i\neq 0\}$, $\varphi_i(\langle z\rangle) := (\frac{z_o}{z_i},\dots,\widehat{\frac{z_i}{z_i}},\dots,\frac{z_n}{z_i})$.

Zur Abkürzung schreiben wir: $z_{(i)} := \varphi_i(\langle z\rangle)$, $t_{i,\nu} := \frac{z_\nu}{z_i}$ für $\nu = 0,\dots,n$.

Dann ist $f_i : U_i\to\mathbb{R}$ mit $f_i(\langle z\rangle) := \log(\sum_{\nu=0}^n|t_{i,\nu}|^2)$ eine differenzierbare Funktion, und man kann eine differenzierbare Abbildung $h_i : T(\mathbb{P}^n)\times_{U_i}T(\mathbb{P}^n)\to\mathbb{C}$ durch $h_i(\langle z\rangle;\xi,\eta) := Lev_{\langle z\rangle}(f_i)(\xi,\eta)$ definieren.

Über $U_i \cap U_k$ gilt: $h_k(\langle z\rangle; \xi, \eta) = \mathrm{Lev}_{\langle z\rangle}(f_k)(\xi, \eta) = \mathrm{Lev}_{\langle z\rangle}(\log |t_{k,i}|^2)(\xi, \eta) +$ $+ \mathrm{Lev}_{\langle z\rangle}(f_i)(\xi, \eta) = h_i(\langle z\rangle; \xi, \eta)$. Also setzen sich die h_i zu einer differenzierbaren Abbildung $h : T(\mathbb{P}^n) \times_{\mathbb{P}^n} T(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{C}$ zusammen. Es ist klar, daß h die Bedingungen a)b) und c) von Def.II.3.1. erfüllt. h ist aber sogar ein Skalarprodukt: Es ist nämlich $h_i(\langle z\rangle; \xi, \xi) = \sum_{\nu,\mu \neq i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t_{i,\nu} \partial \bar{t}_{i,\mu}}(\langle z\rangle)\, \xi_\nu \bar{\xi}_\mu =$

$$= \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{n} |t_{i,\nu}|^2} \cdot \sum_{\nu \neq i} \xi_\nu \bar{\xi}_\nu - \frac{1}{(\sum_{\nu=0}^{n} |t_{i,\nu}|^2)^2} \cdot \sum_{\nu,\mu \neq i} \bar{t}_{i,\nu} t_{i,\mu} \xi_\nu \bar{\xi}_\mu =$$

$$= \frac{1}{(1+|z_{(i)}|^2)^2}\left((1 + |z_{(i)}|^2) \cdot |\xi|^2 - \langle \xi, z_{(i)}\rangle \overline{\langle \xi, z_{(i)}\rangle}\right) >$$

$$> \frac{1}{(1+|z_{(i)}|^2)^2}\left(|z_{(i)}|^2 \cdot |\xi|^2 - |\langle \xi, z_{(i)}\rangle|^2\right) \geq 0 \quad \text{für} \quad \xi \neq 0.$$

2) Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, $i : X' \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist die Einschränkung i^*E von E auf X' ein linearer Raum über X'. Wegen $(i^*E) \times_{X'} (i^*E) \cong i^*(E \times_X E)$ induziert jedes Skalarprodukt h auf E in kanonischer Weise ein Skalarprodukt i^*h auf i^*E.

3) Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, $E' \xrightarrow{j} E$ ein linearer Unterraum. Ist h ein Skalarprodukt auf E, so ist $h' := h \circ (j \times_X j)$ ein Skalarprodukt auf E'.

4) E_1, E_2 seien lineare Räume über X, h_λ sei Skalarprodukt auf E_λ, für $\lambda = 1,2$. Wegen $(E_1 \oplus E_2) \times_X (E_1 \oplus E_2) \cong (E_1 \times_X E_1) \times_X (E_2 \times_X E_2)$ ist dann $h := h_1 \circ pr_1 + h_2 \circ pr_2$ ein Skalarprodukt auf $E_1 \oplus E_2$. Sind die E_λ Vektorbündel, so hat man bezüglich geeigneter Trivialisierungen:

$$h_i = \begin{pmatrix} (h_1)_i & 0 \\ 0 & (h_2)_i \end{pmatrix}$$

5) Sei $E \xrightarrow{\pi} X$ ein Vektorbündel, h ein Skalarprodukt auf E. Gehört zu h gemäß Satz II.3.4. das System $(h_i)_{i \in I}$, so definiert $(h_i^*)_{i \in I}$ mit $h_i^* := (h_i^T)^{-1}$ ein Skalarprodukt h^* auf E^*. (Bemerkung dazu: Sei $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^q$ eine Trivialisierung von E. Dann existiert der duale Isomorphismus $\varphi^* : U \times (\mathbb{C}^q)^* \to (\pi^*)^{-1}(U)$, wobei $\pi^* : E^* \to X$ die Projektion des dualen Bündels ist. Bezeichnet man noch mit $\varrho : \mathbb{C}^q \to (\mathbb{C}^q)^*$ den kanonischen Isomorphismus mit $\varrho(z)(w) = z^T \cdot w$, so ist $\psi := (\varphi^* \circ (\mathrm{id} \times \varrho))^{-1} : (\pi^*)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^q$ eine Trivialisierung für E^*, die sogenannte "duale Trivialisierung zu φ". Führt das Trivialisierungssystem $(\varphi_i)_{i \in I}$ von E zu dem Cozyklus (g_{ik}), so führt das duale Trivialisierungssystem $(\psi_i)_{i \in I}$ von E^* zum Cozyklus (g_{ik}^*), mit $g_{ik}^* := g_{ki}^T$. Bezüglich dieser Übergangsfunktionen definiert (h_i^*) das Skalarprodukt h^*)

II.3.5.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum und h ein Skalarprodukt auf E.

a) Ist $x_o \in \underline{X}$, $\varphi : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ eine Pseudotrivialisierung von E in x_o und $h_\varphi : U \to GL(q,\mathbb{C})$ eine differenzierbare Abbildung mit $h^T_\varphi = c \circ h_\varphi$ und $h = Ev \circ (h_\varphi \times id \times id) \circ J^q_U \circ (\varphi \times_U \varphi)$, so heißt h_φ eine lokale Darstellung von h in x_o bzgl. φ.

b) Die Pseudotrivialisierung $\varphi : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ heißt normal in x_o bezüglich h, falls es eine lokale Darstellung h_φ von h in x_o bzgl. h gibt, so daß $h_\varphi(x_o) = 1_q$ und $(d'h_\varphi)_{x_o} = 0$ ist.

II.3.6.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, h ein Skalarprodukt auf E, $x_o \in \underline{X}$ und $q := \dim E_{x_o}$. Dann gibt es eine spezielle Karte $j : U \hookrightarrow B$ für X in x_o, eine Pseudotrivialisierung $\varphi : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ von E in x_o und differenzierbare Abbildungen $h_\varphi : U \to GL(q,\mathbb{C})$, $H : B \to GL(q,\mathbb{C})$, so daß gilt:

a) h_φ ist eine lokale Darstellung von h in x_o bzgl. φ.

b) φ ist (vermöge h_φ) normal in x_o bezüglich h.

c) $H \circ j = h_\varphi$.

d) $\chi_{H^c} \circ (j \times id) \circ \varphi = \chi_h$ (wobei $\chi_H : B \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{R}$ durch $\chi_H(z,w) := w^T \bullet H(z) \bullet \bar{w}$ definiert ist).

Beweis: Sei $j : U_1 \hookrightarrow B_1$ eine spezielle komplexe Karte für X in x_o, so daß es eine Pseudotrivialisierung $\varphi_1 : E_{U_1} \hookrightarrow U_1 \times \mathbb{C}^q$ für E in x_o und eine lokale Darstellung h_{φ_1} von h in x_o bzgl. φ_1 gibt. $h_{\varphi_1}(x_o)$ ist eine positiv definite hermitesche Matrix, daher gibt es eine invertierbare Matrix A mit $A^T \bullet h_{\varphi_1}(x_o) \bullet \bar{A} = 1_q$. $F_A : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q$ sei definiert durch $F_A(z) := A \bullet z$. Außerdem sei für $B \in GL(q,\mathbb{C})$ die Abbildung $G_B : GL(q,\mathbb{C}) \to GL(q,\mathbb{C})$ definiert durch $G_B(R) := B^T \bullet R \bullet \bar{B}$. Dann ist $G_{(1_q)} = id_{GL(q,\mathbb{C})}$ und $Ev \circ (G_B \times F_A \times F_A) = Ev \circ (G_{B \bullet A} \times id \times id)$.

$\varphi_2 := (id \times F_{A^{-1}}) \circ \varphi_1 : E_{U_1} \hookrightarrow U_1 \times \mathbb{C}^q$ ist eine Pseudotrivialisierung für E in x_o, und für $h_{\varphi_2} := G_A \circ h_{\varphi_1} : U_1 \to GL(q,\mathbb{C})$ gilt: $h^T_{\varphi_2} = c \circ h_{\varphi_2}$ und

$Ev \circ (h_{\varphi_2} \times id \times id) \circ J^q_{U_1} \circ (\varphi_2 \times_{U_1} \varphi_2) = Ev \circ (G_A \times id \times id) \circ (h_{\varphi_1} \times F_{A^{-1}} \times F_{A^{-1}}) \circ J^q_{U_1} \circ$

$\circ (\varphi_1 \times_{U_1} \varphi_1) = Ev \circ (G_A \times F_{A^{-1}} \times F_{A^{-1}}) \circ (h_{\varphi_1} \times id \times id) \circ J^q_{U_1} \circ (\varphi_1 \times_{U_1} \varphi_1) =$

$= Ev \circ (h_{\varphi_1} \times id \times id) \circ J^q_{U_1} \circ (\varphi_1 \times_{U_1} \varphi_1)$.

Also ist h_{φ_2} eine lokale Darstellung von h in x_o bzgl. φ_2, und es ist $h_{\varphi_2}(x_o) = 1_q$.

Zu h_{φ_2} gibt es eine Umgebung $U_2(x_0) \subset U_1$, einen Bereich $B_2 \subset B_1$ mit $\widetilde{j}(U_2) = B_2 \cap \widetilde{j}(U_1)$ und eine differenzierbare Abbildung $H_2 : B_2 \to GL(q,\mathbb{C})$ mit $h_{\varphi_2} = H_2 \circ j$.

$R = (R_{\lambda\varkappa} \mid \lambda,\varkappa = 1,\ldots,q) : B_2 \to M_{q,q}(\mathbb{C})$ sei definiert durch $R_{\lambda\varkappa}(z) = \delta_{\lambda\varkappa} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial (H_2)_{\varkappa\lambda}}{\partial z_\nu}(0) \cdot z_\nu$ für $n := \dim B_2$. Da $R(0) = 1_q$ ist, gibt es eine Umgebung $U(x_0) \subset U_2$ und einen Bereich $B \subset B_2$ mit $\widetilde{j}(U) = B \cap \widetilde{j}(U_2)$, so daß $R \mid B \in Hol(B, GL(q,\mathbb{C}))$ ist, also $R^{-1} \circ j \in Hol(U, GL(q,\mathbb{C}))$. (Hier bezeichnet R^{-1} die inverse Matrix zu R!)

$\varphi := (pr_1, ev \circ ((R^{-1} \circ j) \times id)) \circ \varphi_2 : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ ist eine Pseudotrivialisierung von E in x_0. Man definiere $H : B \to GL(q,\mathbb{C})$ durch $H(z) := R(z)^T \cdot H_2(z) \cdot \overline{R(z)}$ und setze $h_\varphi := H \circ j : U \to GL(q,\mathbb{C})$. Offensichtlich ist $h_\varphi^T = c \cdot h_\varphi$, und es gilt: $Ev \circ (h_\varphi \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi \times_U \varphi) =$

$= Ev \circ ((H \circ j) \times id \times id) \circ J_U^q \circ \left[(pr_1, ev \circ ((R^{-1} \circ j) \times id)) \times_U (pr_1, ev \circ ((R^{-1} \circ j) \times id))\right] \circ (\varphi_2 \times_U \varphi_2) =$

$= Ev \circ ((H \circ j) \times id \times id) \circ \left[pr_1, ev \circ ((R^{-1} \circ j) \times id) \circ p_1, ev \circ ((R^{-1} \circ j) \times id) \circ p_2\right] \circ J_U^q \circ (\varphi_2 \times_U \varphi_2) =$

$= Ev \circ (H \times id \times id) \circ \left[pr_1, ev \circ (R^{-1} \times id) \circ p_1, ev \circ (R^{-1} \times id) \circ p_2\right] \circ (j \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi_2 \times_U \varphi_2) =$

$= Ev \circ (H_2 \times id \times id) \circ (j \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi_2 \times_U \varphi_2) =$

$= Ev \circ (h_{\varphi_2} \times id \times id) \circ J_U^q \circ (\varphi_2 \times_U \varphi_2)$.

Also ist h_φ eine lokale Darstellung von h in x_0 bzgl. φ.

Da $H \circ j = h_\varphi$ ist, ist trivialerweise auch $\chi_H \circ (j \times id) \circ \varphi = \chi_h$ (man vergleiche etwa den Beweis zu Satz II.3.2.)

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß φ (vermöge h_φ) eine normale Trivialisierung in x_0 bzgl. h ist:

Es ist $h_\varphi(x_0) = H(0) = R(0)^T \cdot h_{\varphi_2}(x_0) \cdot \overline{R(0)} = 1_q$ und $(d'h_\varphi)_{x_0}(\xi) =$

$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial z_\nu}(0)\, \xi_\nu$ (für $T_{x_0}(j)(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$),

mit $\frac{\partial H_{\lambda\varkappa}}{\partial z_\nu}(0) = \frac{\partial}{\partial z_\nu}\Big|_0 \left(\sum_{i,k} R_{i\lambda}\, (H_2)_{ik}\, \overline{R}_{k\varkappa}\right) =$

$= \sum_{i,k} \left[\frac{\partial (H_2)_{ik}}{\partial z_\nu}(0) R_{i\lambda}(0) \overline{R}_{k\varkappa}(0) + \frac{\partial R_{i\lambda}}{\partial z_\nu}(0)(H_2)_{ik}(0) \overline{R}_{k\varkappa}(0)\right] =$

$= \frac{\partial (H_2)_{\lambda\varkappa}}{\partial z_\nu}(0) + \frac{\partial R_{\varkappa\lambda}}{\partial z_\nu}(0) = 0$. Damit ist alles bewiesen. ▼

Beispiel:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ mit $z_i^{(0)} \neq 0$. Man kann dann eine ON-Basis $\{e_0,\ldots,e_n\}$ von $\mathbb{C}^{n+1}$ mit $e_i = \frac{z_0}{\|z_0\|}$ finden. Führt man auf dem $\mathbb{C}^{n+1}$ die neuen Koordinaten

$w_0,\dots,w_n$ mit $w_k(z) := \langle e_k, z\rangle$ ein, so ist $(w_0(z_0),\dots,w_n(z_0)) =$
$= (0,\dots,\|z_0\|,\dots,0)$. Die Koordinaten $w_0,\dots,w_n$ induzieren homogene Koordinaten auf dem $\mathbb{P}^n$, so daß $\langle z_0\rangle = \langle 0,\dots,1,\dots,0\rangle$ ist.

Wir zeigen, daß die durch diese Koordinaten bestimmte Trivialisierung von $T(\mathbb{P}^n)$ normal in $\langle z_0\rangle$ bzgl. der Fubini-Metrik h ist. Dabei sei o.B.d.A. $i = 0$, also $\langle z_0\rangle = \langle 1,0,\dots,0\rangle$.

Es ist $(h_0)_{\nu\mu}(\langle z\rangle) = \mathrm{Lev}_{\langle z\rangle}(f_0)(\frac{\partial}{\partial t_{0,\nu}}, \frac{\partial}{\partial t_{0,\mu}}) =$

$$= \frac{\partial^2(\log(\sum_{\lambda=0}^{n} t_{0,\lambda}\,\overline{t}_{0,\lambda}))}{\partial t_{0,\nu}\,\partial \overline{t}_{0,\mu}}(\langle z\rangle) = \Big(-\frac{\overline{t}_{0,\nu}\, t_{0,\mu}}{(\sum_{\lambda} t_{0,\lambda}\,\overline{t}_{0,\lambda})^2} + \frac{\delta_{\nu\mu}}{\sum_{\lambda} t_{0,\lambda}\,\overline{t}_{0,\lambda}}\Big)(\langle z\rangle).$$

Daraus folgt:

$(h_0)_{\nu\mu}(\langle 1,0,\dots,0\rangle) = \delta_{\nu\mu}$ für $\nu,\mu = 1,\dots,n$

und $\frac{\partial (h_0)_{\nu\mu}}{\partial t_{0,\varrho}}(\langle 1,0,\dots,0\rangle) = 0$ für $\nu,\mu,\varrho = 1,\dots,n$.

§ 4 Der Positivitätsbegriff

II.4.1.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang q, $\omega : X \to E$ der Nullschnitt.

a) E heißt negativ, falls es auf E ein Skalarprodukt h gibt, so daß
χ_h auf $\underline{E} - \underline{\omega(X)}$ 1-konvex ist.

b) E heißt positiv, falls E^* negativ ist.

II.4.2.Satz: Ein Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} X$ ist genau dann positiv, wenn es ein Skalarprodukt h auf E gibt, so daß für jedes $x_0 \in \underline{X}$ und jede in x_0 bzgl. h normale Trivialisierung $\varphi : E_U \to U \times \mathbb{C}^q$ von E gilt:

Für $v \in E_{x_0} - \{0\}$ ist $\mathrm{Lev}_v(\chi_h)$ auf $B_v^{(\varphi)}(E) = T_v(\varphi)^{-1}(T_{X,x_0})$ negativ definit.

Beweis: E ist genau dann positiv, wenn es ein Skalarprodukt h auf E gibt, so daß für das duale Skalarprodukt h^* gilt: $\mathrm{Lev}_v(\chi_{h^*})(\eta,\eta) > 0$ für $v \in \underline{E^*} - \underline{\omega(X)}$ und $\eta \in T_{E^*,v}$.

Sei $x_0 \in \underline{X}$, $\varphi^* : E_U \to U \times \mathbb{C}^q$ eine Trivialisierung für E^* mit $x_0 \in \underline{U}$. O.B.d.A. gibt es eine spezielle komplexe Karte $j : U \hookrightarrow B$ für X in x_0 und eine differenzierbare Abbildung $H^* : B \to GL(q,\mathbb{C})$ mit $H^* \circ j = h^*_{\varphi^*}$.
Es sei $H := ((H^*)^T)^{-1}$.

1) Sei E positiv, φ^* die duale Trivialisierung zu einer in x_o bzgl. h normalen Trivialisierung $\varphi : E_U \to U \times \mathbb{C}^q$ von E. Dann ist $H \circ j = h_\varphi$, und φ^* ist normal in x_o bezüglich h^*.

Es ist $\chi_{h^*} = \chi_{H^*} \circ (j \times id) \circ \varphi^*$ und $\chi_h = \chi_H \circ (j \times id) \circ \varphi$. Sei $v \in E_{x_o}$ bzw. $v^* \in E^*_{x_o}$. Ist $T_v((j \times id) \circ \varphi)(\eta) = (\eta', \eta'') \in T_{X,x_o} \oplus \mathbb{C}^q$ für $\eta \in T_{E,v}$ und $T_{v^*}((j \times id) \circ \varphi^*)(\eta^*) = ((\eta^*)', (\eta^*)'') \in T_{X,x_o} \oplus \mathbb{C}^q$ für $\eta^* \in T_{E^*,v^*}$, sowie $\widetilde{\varphi}^*(v^*) = (x_o, w^*)$, $\widetilde{\varphi}(v) = (x_o, w)$, so erhält man:

$$Lev_{v^*}(\chi_{h^*})(\eta^*, \eta^*) = Lev_{(0,w^*)}(\chi_{H^*})(((\eta^*)', (\eta^*)''), ((\eta^*)', (\eta^*)'')) =$$

$$= \sum_{i,j} \Big(- (w^*)^T \circ \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) \circ \bar{w}^* \Big)(\eta^*)'_i (\bar{\eta}^*)'_j + \sum_{\nu,\mu} \delta_{\nu\mu} (\eta^*)''_\nu (\bar{\eta}^*)''_\mu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q} (\eta^*)''_\nu (\bar{\eta}^*)''_\nu - \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{\nu,\mu=1}^{q} \frac{\partial^2 H_{\nu\mu}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0)\ w^*_\nu \bar{w}^*_\mu \Big)(\eta^*)'_i (\bar{\eta}^*)'_j ,$$

und $Lev_v(\chi_h)(\eta, \eta) = \sum_{\nu=1}^{q} \eta''_\nu \bar{\eta}''_\nu + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{\nu,\mu=1}^{q} \frac{\partial^2 H_{\nu\mu}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0)\ w_\nu \bar{w}_\mu \Big) \eta'_i \bar{\eta}'_j$.

Da E positiv ist, ist $Lev_{v^*}(\chi_{h^*})$ positiv definit für alle $v^* \neq 0$, es muß also

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{\nu,\mu=1}^{q} \frac{\partial^2 H_{\nu\mu}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0)\ w_\nu \bar{w}_\mu \Big) \eta'_i \bar{\eta}'_j < 0 \quad \text{für } w \neq 0 \text{ und } \eta' \neq 0 \text{ sein.}$$

Das bedeutet, daß $Lev_v(\chi_h)$ für $v \neq 0$ auf $\{\eta \in T_{E,v} : \eta'' = 0\} = B_v^{(\varphi)}(E)$ negativ definit ist.

2) Ist das Kriterium erfüllt, so folgt aus der Tatsache, daß es stets normale Trivialisierungen gibt, und aus den Berechnungen von 1), daß E^* vermöge h^* negativ, also E positiv ist. ▼

II.4.3.Satz: $T(\mathbb{P}^n)$ ist ein positives Vektorbündel.

Beweis: Sei $\langle z \rangle \in \mathbb{P}^n$, $\xi \in T_{\mathbb{P}^n,\langle z \rangle}$. Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\langle z \rangle = \langle 1,0,\ldots,0 \rangle$ ist. Dann ist die kanonische Trivialisierung $\varphi_0 : T(\mathbb{P}^n)_{U_0} \to U_0 \times \mathbb{C}^n$ mit

$$\varphi_0\Big(\langle z_0,\ldots,z_n \rangle, \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial t_{0,\nu}}\Big) = (t_{0,1},\ldots,t_{0,n};a_1,\ldots,a_n) \text{ normal in } \langle z \rangle$$

bezüglich der Fubini-Metrik h.

Es gilt: $\sum_{k,l} \Big(\sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 (h_0)_{\nu\mu}}{\partial t_{0,k} \partial \bar{t}_{0,l}}(0)\ w_\nu \bar{w}_\mu \Big) \xi_k \bar{\xi}_l =$

$$= \sum_{k,l} \Big(\sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2}{\partial t_{0,k} \partial \bar{t}_{0,l}} \Big|_0 \Big[\frac{1}{(1 + |z_{(o)}|^2)^2} \big(- \bar{t}_{0,\nu} t_{0,\mu} + (1 + |z_{(o)}|^2) \delta_{\nu\mu} \big) \Big] w_\nu \bar{w}_\mu \Big) \xi_k \bar{\xi}_l$$

$$= -\sum_{k,l}\Big(\sum_{\nu,\mu}(\delta_{kl}\delta_{\nu\mu}+\delta_{\nu l}\delta_{k\mu})\,w_\nu\bar{w}_\mu\Big)\,\xi_k\,\bar{\xi}_l =$$

$$= -\Big(\sum_{k,\nu} w_\nu\bar{w}_\nu\,\xi_k\,\bar{\xi}_k + \sum_{k,l} w_l\bar{w}_k\,\xi_k\,\bar{\xi}_l\Big) = -\left(|w|^2\cdot|\xi|^2 + |\langle w,\xi\rangle|^2\right) < 0$$

für $w, \xi \neq 0$.

Nach Satz II.4.2. bedeutet das, daß $T(\mathbb{P}^n)$ positiv ist. ▼

II.4.4.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $E' \to E'' \to 0$ eine exakte Sequenz von Vektorbündeln über X.

Ist E' positiv, so ist auch E" positiv.

Beweis: Die duale Sequenz $0 \to (E'')^* \to (E')^*$ ist ebenfalls exakt. Nach Voraussetzung ist $(E')^*$ negativ, vermöge eines Skalarproduktes h. h induziert aber auf dem Unterbündel $(E'')^*$ ein Skalarprodukt, durch welches $(E'')^*$ negativ wird. Also ist E" positiv. ▼

II.4.5.Satz: Sei X ein komplexer Raum. E', E" seien positive Vektorbündel über X. Dann ist auch E'⊕E" positiv.

Beweis: Es ist $(E'\oplus E'')^* \cong (E')^*\oplus(E'')^*$. Sei $(E')^*$ negativ durch ein Skalarprodukt h', $(E'')^*$ negativ durch ein Skalarprodukt h". $h := h'\circ pr_1 + h''\circ pr_2$ ist ein Skalarprodukt auf $(E')^*\oplus(E'')^*$, und wegen $Lev_{(v,w)}(h'\circ pr_1 + h''\circ pr_2)(\xi,\xi) =$ $= Lev_v(h')(T_{(v,w)}(pr_1)(\xi), T_{(v,w)}(pr_1)(\xi)) + Lev_w(h'')(T_{(v,w)}(pr_2)(\xi),\ldots)$ ist $(E')^*\oplus(E'')^*$ negativ, also E'⊕E" positiv. ▼

Bemerkung: Wegen Satz II.4.4. gilt auch: Ist E'⊕E" positiv, so sind die Vektorbündel E', E" positiv.

II.4.6.Satz: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein holomorphes Vektorbündel, $i : Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum.

Ist E positiv, so ist auch i^*E positiv.

Beweis: Sei $E = Vec(\mathcal{F})$. Dann ist $(i^*E)^* = Vec(\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{H}_X}\mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_Y)) =$ $= Vec(\mathcal{H}om_{\mathcal{H}_X}(\mathcal{F},\mathcal{H}_X)\otimes_{\mathcal{H}_X}\mathcal{H}_Y) = i^*(E^*)$. Ist E^* negativ durch ein Skalarprodukt h, so ist $i^*(E^*)$ negativ durch das Skalarprodukt i^*h. Also ist i^*E positiv. ▼

II.4.7.Folgerung: Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist das Normalenbündel $N_{\mathbb{P}^n}(X)$ positiv.

Beweis: Sei $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ die kanonische Injektion. Dann ist $N_{\mathbb{P}^n}(X) = i^*T(\mathbb{P}^n)/T(X)$. Mit Satz II.4.3., Satz II.4.6. und Satz II.4.4. folgt die Behauptung. ▼

Satz II.4.2. erlaubt es, den Begriff der Positivität auf lineare Räume zu übertragen. Bei dieser Gelegenheit soll er auch noch etwas verallgemeinert werden:

II.4.8.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum. E heißt r-positiv, falls es auf E ein Skalarprodukt h gibt, so daß für alle $x \in X$ gilt:

Ist $\varphi : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^Q$ eine bezüglich h normale Pseudotrivialisierung von E in x, so besitzt $\mathrm{Lev}_v(\chi_h)$ für jedes $v \in E_x - \{0\}$ auf $B_v^{(\varphi)}(E)$ höchstens r - 1 nicht-negative Eigenwerte.

E heißt positiv, falls E 1-positiv ist.

Es ist offensichtlich, daß diese Definition für ein Vektorbündel E mit der früher gegebenen übereinstimmt. Ist zusätzlich X eine komplexe Mannigfaltigkeit, so ergibt sich für beliebiges r der Begriff des metrisch r-konkaven Bündels, wie er etwa bei Schneider (vgl. [15]) behandelt wird. Im Fall r = 1 erhält man einen Positivitätsbegriff, der äquivalent zu dem von Ph.A.Griffiths ist.

KAPITEL III DAS RESTRAUM-PROBLEM FÜR KOMPAKTE KOMPLEXE MANNIGFALTIGKEITEN

§ 1 Normalenbündel zu komplexen Unterräumen

III.1.1.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ eine kohärente Idealgarbe über X, Y der durch $\mathcal{F}$ definierte Unterraum. Dann bezeichnet man den linearen Raum $N_X(Y) := \mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \times_X Y$ als Normalenbündel von Y in X.

Bemerkung: Es ist $\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) \times_X Y = \mathrm{Lin}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{H}_X} \mathcal{H}_Y) = \mathrm{Lin}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{H}_X} (\mathcal{H}_X/\mathcal{F})) =$
$= \mathrm{Lin}(\mathcal{F}/\mathcal{F}^2)$.

III.1.2.Definition: Sei A eine analytische Stellenalgebra. Unter einer Primsequenz in A versteht man eine endliche Teilmenge $\{f_1,\ldots,f_q\} \subset \mathfrak{m}_A$ mit folgender Eigenschaft:
f_1 ist Nichtnullteiler in A,
f_ν ist Nichtnullteiler in $A/(f_1,\ldots,f_{\nu-1})$ für $\nu = 2,\ldots,q$.

Bemerkung:Auf die Numerierung der Elemente $f_1,\ldots,f_q$ kommt es nicht an. Ist $\{f_1,\ldots,f_q\}$ eine Primsequenz, so ist $\dim A/(f_1,\ldots,f_q) = \dim A - q$. Ist umgekehrt A regulär und $\dim A/(f_1,\ldots,f_q) = \dim A - q$, so ist $\{f_1,\ldots,f_q\}$ eine Primsequenz. Zu den Beweisen vgl. [9], Kap.III, § 1.

III.1.3.Definition: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{F}$ eine kohärente Idealgarbe, Y der durch $\mathcal{F}$ definierte Unterraum. Für $x \in Y$ sei $\mathrm{codim}_x(Y,X) :=$
$= \dim \mathcal{H}_{X,x} - \dim \mathcal{H}_{Y,x}$.
Man sagt, Y ist in X lokal vollständiger Durchschnitt, falls $\mathcal{F}_x$ stets durch $\mathrm{codim}_x(Y,X)$ Elemente erzeugt wird. Ist überall $\mathrm{codim}_x(Y,X) = 1$, so nennt man Y eine analytische Hyperfläche in X.

III.1.4.Lemma: Sei A eine analytische Stellenalgebra, $I \subset A$ ein Ideal, das von einer Primsequenz $\{g_1,\ldots,g_q\}$ erzeugt wird. Für $n \in \mathbb{N}_o$ sei $(A/I)_n[X_1,\ldots,X_q]$ die Menge der homogenen Polynome vom Grad n über A/I.
Dann ist die durch $X_\nu \mapsto g_\nu$ induzierte Abbildung $\varphi_n : (A/I)_n[X_1,\ldots,X_q] \to I^n/I^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_o$ injektiv.

Beweis: Für $a \in A$ sei $\bar{a}$ das Bild in A/I. Wir führen Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist trivial, sei $n > 0$.

Sei $F = \sum_{|\nu|=n} \bar{c}_{\nu_1\ldots\nu_q} X_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot X_q^{\nu_q} \in (A/I)_n[X_1,\ldots,X_q]$ mit $\varphi_n(F) = 0$.

Dann gibt es Elemente $d_{\mu_1\cdots\mu_q} \in A$, so daß $\sum_{|\nu|=n} c_{\nu_1\cdots\nu_q} g_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot g_q^{\nu_q} =$

$= \sum_{|\mu|=n+1} d_{\mu_1\cdots\mu_q} g_1^{\mu_1} \cdots g_q^{\mu_q}$ ist, also

$$\sum_{|\nu|=n} (c_{\nu_1\cdots\nu_q} - \sum_{\lambda=1}^{q} d_{\nu_1,\ldots,\nu_\lambda+1,\ldots,\nu_q}\, g_\lambda) g_1^{\nu_1} \cdots g_q^{\nu_q} = 0.$$

Um zu zeigen, daß $F = 0$, also $c_{\nu_1\cdots\nu_q} \in I$ ist, genügt es zu zeigen, daß aus $\sum_{|\nu|=n} a_{\nu_1\cdots\nu_q} g_1^{\nu_1} \cdots g_q^{\nu_q} = 0$ folgt: $a_{\nu_1\cdots\nu_q} = 0$. Das aber beweisen wir durch Induktion nach q:

Zunächst sei $q = 1$. Ist $a\cdot g_1^n = 0$, so ist $a\cdot g_1^{n-1} = 0$, da g_1 kein Nullteiler ist, und nach endlich vielen Schritten erhält man, daß $a = 0$ ist.

Sei nun $q > 1$. Es ist $\sum_{|\nu|=n} a_{\nu_1\cdots\nu_q} g_1^{\nu_1} \cdots g_q^{\nu_q} = g_1\cdot Q_{n-1}(g_1,\ldots,g_q) +$

$+ R_n(g_2,\ldots,g_q)$ mit Polynomen Q_{n-1} (vom Grad n-1) und R_n (vom Grad n). Modulo g_1 ist $R_n(g_2,\ldots,g_q) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung über q verschwinden alle Koeffizienten von R_n. Also ist $g_1\cdot Q_{n-1}(g_1,\ldots,g_q) = 0$ und damit $Q_{n-1}(g_1,\ldots,g_q) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung über n verschwinden dann aber auch alle Koeffizienten von Q_{n-1}, und damit ist alles gezeigt. ▼

III.1.5.Satz: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{F}$ eine kohärente Idealgarbe, Y der durch $\mathcal{F}$ definierte Unterraum. Y ist genau dann in X lokal vollständiger Durchschnitt, wenn gilt:

a) $\mathcal{F}/\mathcal{F}^2$ ist eine lokal-freie $\mathcal{H}_Y$-Garbe.

b) $S^n_{\mathcal{H}_Y}(\mathcal{F}/\mathcal{F}^2) \cong \mathcal{F}^n/\mathcal{F}^{n+1}$.

Beweis: Die Aussage braucht nur lokal bewiesen zu werden. Sei $x \in Y$, $A := \mathcal{H}_{X,x}$, $I := \mathcal{F}_x$.

1) Ist Y in X lokal vollständiger Durchschnitt, so gibt es eine Primsequenz $\{g_1,\ldots,g_q\} \subset A$, die I erzeugt.

$\Phi : q(A/I) \to I/I^2$ sei definiert durch $\Phi(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_q) := \sum_{\nu=1}^{q} \sigma_\nu g_\nu \bmod I^2$.

Ist $\varepsilon : q(A/I) \to (A/I)_1[X_1,\ldots,X_q]$ der kanonische Isomorphismus und $\varphi_1 : (A/I)_1[X_1,\ldots,X_q] \to I/I^2$ die in Lemma II.1.4. beschriebene Abbildung, so ist $\varphi_1\circ\varepsilon = \Phi$. Da φ_1 injektiv ist, ist auch Φ injektiv. Die Surjektivität von Φ ist trivial.

Damit ist $I/I^2 \cong q(A/I)$, also $S^n_{A/I}(I/I^2) \cong S^n(q(A/I)) \cong (A/I)_n[X_1,\ldots,X_q]$. Mit Lemma III.1.4. folgt, daß $S^n_{A/I}(I/I^2) \cong I^n/I^{n+1}$ ist.

2) Sei $I = (g_1,\ldots,g_q)$, so daß $(A/I)[X_1,\ldots,X_q] \cong gr_I(A) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ vermöge der Abbildung $X_\nu \longmapsto g_\nu$ ist.

Für $1 \leq i \leq q$ ist zu zeigen, daß g_i kein Nullteiler in $A/(g_1,\dots,g_{i-1})$ ist: Sei $a \in A$, $a \cdot g_i = \sum_{\nu=1}^{i-1} b_\nu g_\nu$ mit $b_\nu \in A$. Durch Induktion nach n zeigen wir, daß $a \in (g_1,\dots,g_{i-1}) + I^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Mit dem Krullschen Durchschnittssatz folgt dann, daß $a \in (g_1,\dots,g_{i-1})$ ist, und das ist die Behauptung.

Zunächst sei n = 1. Es ist $(a \bmod I)\, X_i = \sum_{\nu=1}^{i-1} (b_\nu \bmod I)\, X_\nu$, also $a \in I$.

Nun sei die Behauptung für n-1 bereits bewiesen, $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $a = \sum_{\nu=1}^{i-1} a_\nu g_\nu + \sum_{|\mu|=n-1} b_{\mu_i \cdots \mu_q} g_i^{\mu_i} \cdot \dots \cdot g_q^{\mu_q}$. Dann ist

$$(a \bmod I)\, X_i = \sum_{\nu=1}^{i-1} (a_\nu \bmod I) X_\nu X_i + \sum_{|\mu|=n-1} (b_{\mu_i \cdots \mu_q} \bmod I)\, X_i^{\mu_i+1} X_{i+1}^{\mu_{i+1}} \cdot \dots \cdot X_q^{\mu_q},$$

also $b_{\mu_i \cdots \mu_q} = \sum_{\lambda=1}^{q} b_{\mu_i \cdots \mu_q, \lambda}\, g_\lambda$, und damit

$$a = \sum_{\nu=1}^{i-1} a_\nu g_\nu + \sum_{\lambda=1}^{i-1} \sum_{|\mu|=n-1} b_{\mu_i \cdots \mu_q, \lambda}\, g_\lambda g_i^{\mu_i} \cdot \dots \cdot g_q^{\mu_q} +$$

$$+ \sum_{\lambda=i}^{q} \sum_{|\mu|=n-1} b_{\mu_i \cdots \mu_q, \lambda}\, g_i^{\mu_i} \cdots g_\lambda^{\mu_\lambda+1} \cdots g_q^{\mu_q}.$$

Dieser Ausdruck liegt offensichtlich in $(g_1,\dots,g_{i-1}) + I^n$. ▼

III.1.6.Folgerung: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $Y \subset X$ ein komplexer Unterraum, der in X lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension q ist.

Dann ist $N_X(Y)$ ein Vektorbündel vom Rang q über Y.

Der Beweis ist trivial.

III.1.7.Satz: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{F}$ eine kohärente Idealgarbe auf X, Y der durch $\mathcal{F}$ definierte Unterraum, $i : Y \hookrightarrow X$ die Inklusion.

Ist Y reduziert und lokal vollständiger Durchschnitt in X, so wird durch $u(a \bmod \mathcal{F}^2) := (d_X a) \otimes 1$ und $v(\omega \otimes f) := f \cdot i^*\omega$ eine kanonische exakte Sequenz von Garben definiert:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}^2 \xrightarrow{u} \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{v} \Omega_Y \longrightarrow 0$$

Zum Beweis vgl. [16].

Dieser Satz motiviert die Bezeichnung "Normalenbündel" für den linearen Raum $N_X(Y)$. Ist nämlich Y sogar regulär, so erhält man die exakte Sequenz von Vektorbündeln:

$$0 \longrightarrow T(Y) \longrightarrow i^*T(X) \longrightarrow N_X(Y) \longrightarrow 0$$

III.1.8.Definition: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $H \subset X$ eine Hyperfläche, definiert durch eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{F}$. Dann heißt $L(H) := \mathrm{Lin}(\mathcal{F})$ das H kanonisch zugeordnete Geradenbündel.

Bemerkungen: Es gibt eine offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in I}$ von X und holomorphe Funktionen f_ι auf U_ι, so daß $\mathcal{F}|U_\iota = f_\iota \cdot \mathcal{H}_X|U_\iota$ ist. $\psi_\iota : \mathcal{H}_X|U_\iota \longrightarrow \mathcal{F}|U_\iota$ sei definiert durch $\psi_\iota(\sigma) := f_\iota \cdot \sigma$.
Es gibt über $U_\iota \cap U_\varkappa$ nirgends verschwindende holomorphe Funktionen $g_{\iota\varkappa}$ mit $f_\iota = g_{\iota\varkappa} \cdot f_\varkappa$. Offensichtlich ist $\psi_\iota^{-1} \circ \psi_\varkappa(\sigma) = g_{\varkappa\iota} \cdot \sigma$, mit $g_{\varkappa\iota} = f_\iota^{-1} f_\varkappa$ über $U_\iota \cap U_\varkappa$ - H. Nach Kap.II, § 1 wird Vec($\mathcal{F}$) durch den Cozyklus $(g_{\varkappa\iota})$ definiert, also L(H) durch $(g_{\iota\varkappa})$ mit $g_{\iota\varkappa} = f_\varkappa^{-1} f_\iota$ über $U_\iota \cap U_\varkappa$ - H.

Beispiel: Sei $H := \{\langle z_0,\dots,z_n\rangle \in \mathbb{P}^n : z_0 = 0\}$ eine "Hyperebene" im $\mathbb{P}^n$.
Dann ist $H \cap U_i = \{\langle z_0,\dots,z_n\rangle \in \mathbb{P}^n : z_i \neq 0, \frac{z_0}{z_i} = 0\} = \{\langle z\rangle \in U_i : f_i(\langle z\rangle) = 0\}$, wenn man $f_i(\langle z\rangle) := \frac{z_0}{z_i}$ setzt. Das Geradenbündel L(H) wird durch den Cozyklus $(\frac{z_k}{z_i})$ definiert. Man nennt es das Hyperebenenschnittbündel und bezeichnet es mit O(1).
Das Geradenbündel $O(n) := O(1)^n$ wird durch den Cozyklus $(\frac{z_k^n}{z_i^n})$ definiert.

III.1.9.Satz: Für $n < 0$ ist O(n) negativ, für $n > 0$ ist O(n) positiv.

Beweis: Sei $g_{ij} := (\frac{z_j}{z_i})^n$ auf $U_i \cap U_j$, $h_i := (\sum_{k=0}^{n} |\frac{z_k}{z_i}|^{2n})^{-1}$ auf U_i für $n > 0$.
Dann ist $h_j = (|\frac{z_i}{z_j}|^{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} |\frac{z_k}{z_i}|^{2n})^{-1} = |g_{ij}|^2 h_i$ auf $U_i \cap U_j$, d.h., das System (h_i) definiert ein Skalarprodukt h auf O(n).
Sei nun $\langle z\rangle \in \mathbb{P}^n$. O.B.d.A. sei $\langle z\rangle = \langle 0,\dots,0,1,0,\dots,0\rangle \in U_i$.
Offensichtlich ist $h_i(\langle z\rangle) = 1$ und $\frac{\partial h_i}{\partial t_{i,\nu}}(\langle z\rangle) = 0$ für $\nu = 0,\dots,\hat{i},\dots,n$.
Dann liegt eine normale Trivialisierung von O(n) in $\langle z\rangle$ bezüglich h vor.
Weiter ist $\sum_{\nu,\mu\neq i} (\frac{\partial^2 h_i}{\partial t_{i,\nu}\partial \overline{t}_{i,\mu}}(\langle z\rangle)|w|^2)\xi_\nu \overline{\xi}_\mu = -\sum_{\nu,\mu\neq i}(\delta_{\nu\mu}|w|^2)\xi_\nu\overline{\xi}_\mu =$
$= -\sum_{\nu\neq i}|w|^2 \cdot |\xi_\nu|^2 < 0$ für $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ und $\xi \in \mathbb{C}^n - \{0\}$. Das bedeutet, daß O(n) positiv ist, und O(-n) ist dementsprechend negativ. ▼

Bemerkung: Für eine Hyperfläche H in einer komplexen Mannigfaltigkeit ist $N_X(H) = i^*L(H)$, wenn man mit $i : H \hookrightarrow X$ die kanonische Injektion bezeichnet.

III.1.10.Definition: Sei X ein komplexer Raum. Für abgeschlossene Unterräume $i_1 : Y_1 \hookrightarrow X$, $i_2 : Y_2 \hookrightarrow X$ definiert man $Y_1 \cap Y_2 := Y_1 \times_X Y_2$.

Bemerkung: Es ist $\underline{Y_1 \cap Y_2} = \underline{Y_1} \cap \underline{Y_2}$. Ist $\mathcal{J}_\lambda$ die kohärente Idealgarbe auf X, die Y_λ definiert, so wird $Y_1 \cap Y_2$ durch $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ definiert.

III.1.11.Satz: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. $H_1,\dots,H_q \subset X$ seien Hyperflächen, $H := H_1 \cap \dots \cap H_q$. $i_\lambda : H \hookrightarrow H_\lambda$ seien die kanonischen Injektionen. Ist $\operatorname{codim}_x(H,X) = q$ für alle $x \in H$, so ist H lokal vollständiger Durchschnitt in X, und es gilt:

$$N_X(H) = i_1^*(N_X(H_1)) \bullet \dots \bullet i_q^*(N_X(H_q))$$

Beweis: Wird H_λ durch $\mathcal{F}_\lambda$ definiert, so wird H durch $\sum_{\lambda=1}^{q} \mathcal{F}_\lambda$ definiert. Es gibt eine offene Überdeckung $(U_\iota)_{\iota \in I}$ von X und holomorphe Funktionen $f_\iota^{(\lambda)}$ auf U_ι für $\lambda = 1,\dots,q$, so daß $\mathcal{F}_\lambda \mid U_\iota = f_\iota^{(\lambda)} \mathcal{H}_X \mid U_\iota$ ist.

1) Sei $x \in H = \bigcap_{\lambda=1}^{q} H_\lambda$. Liegt x in U_ι, so ist $\mathcal{H}_{H,x} = \mathcal{H}_{X,x}/(f_\iota^{(1)},\dots,f_\iota^{(q)})\mathcal{H}_{X,x}$. Wegen $\operatorname{codim}_x(H,X) = q$ ist $\{(f_\iota^{(1)})_x,\dots,(f_\iota^{(q)})_x\}$ eine Primsequenz. Also ist H in x lokal vollständiger Durchschnitt in X.

2) Sei $f_\varkappa^{(\nu)} = g_{\varkappa\iota}^{(\nu)} \cdot f_\iota^{(\nu)}$ über $U_\iota \cap U_\varkappa$ für $\nu = 1,\dots,q$. $\psi_\iota : {}^q\mathcal{H}_H \mid U_\iota \to \mathcal{F}/\mathcal{F}^2$ (mit $\mathcal{F} := \sum_{\lambda=1}^{q} \mathcal{F}_\lambda$) sei definiert durch $\psi_\iota(\hat{\delta}_1 \bmod \mathcal{F},\dots,\hat{\delta}_q \bmod \mathcal{F}) :=$
$= \sum_{\nu=1}^{q} \hat{\delta}_\nu f_\iota^{(\nu)} \bmod \mathcal{F}^2$. Dann ist $\mathrm{pr}_\nu \circ \psi_\iota^{-1} \circ \psi_\varkappa \circ \mathrm{pr}_\mu = \mathrm{pr}_\nu \circ \psi_\iota^{-1}(f_\varkappa^{(\mu)} \bmod \mathcal{F}^2) =$
$= \mathrm{pr}_\nu \circ \psi_\iota^{-1}((g_{\varkappa\iota}^{(\mu)} \cdot f_\iota^{(\mu)}) \bmod \mathcal{F}^2) = \mathrm{pr}_\nu(0,\dots,0,g_{\varkappa\iota}^{(\mu)} \bmod \mathcal{F},0,\dots,0) =$
$= (g_{\varkappa\iota}^{(\mu)} \bmod \mathcal{F}) \cdot \delta_{\nu\mu}$.

Also wird $\mathrm{Vec}(\mathcal{F}/\mathcal{F}^2)$ durch den Cozyklus $(G_{\iota\varkappa})$ mit

$$G_{\iota\varkappa} := \begin{pmatrix} g_{\varkappa\iota}^{(1)} \bmod \mathcal{F} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{\varkappa\iota}^{(q)} \bmod \mathcal{F} \end{pmatrix} \quad \text{definiert.}$$

Andererseits entspricht $\mathrm{Vec}(\mathcal{F}_\lambda/\mathcal{F}_\lambda^2)$ dem Cozyklus $(g_{\varkappa\iota}^{(\lambda)} \bmod \mathcal{F}_\lambda)$, also $i_\lambda^* \mathrm{Vec}(\mathcal{F}_\lambda/\mathcal{F}_\lambda^2)$ dem Cozyklus $(g_{\varkappa\iota}^{(\lambda)} \bmod \mathcal{F})$. Daraus folgt:
$N_X(H) \cong i_1^* N_X(H_1) \bullet \dots \bullet i_q^* N_X(H_q)$. ▼

§ 2 q-konvexe Restmengen

III.2.1.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum.

a) $H_E : \pi^*E \to T(E)$ sei die in §2, Kap.II definierte kanonische Abbildung, $\Delta : E \to E \times_X E = \pi^*E$ die Diagonalabbildung. Dann nennt man $\tau_E := H_E \circ \Delta : E \to T(E)$ die kanonische Einbettung von E in sein Tangentialbündel.

b) Ist $M \subset E$ offen und $f \in \Gamma(M, \mathcal{Z}_E)$ eine differenzierbare Funktion, so nennt man die durch $Ff(v) := (df)_v(\tilde{\tau}_E(v))$ definierte Abbildung $Ff : M \to \mathbb{R}$ die Faserableitung von f.

III.2.2.Definition: Sei $M \subset \mathbb{C}^q$ offen, $g : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $z \in M$ und $w \in \mathbb{C}^q$. Dann definiert man:

$$\langle (\operatorname{grad} g)_z, w \rangle := (dg)_z(\Lambda_B(z,w)) = \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial z_\mu}(z) w_\mu + \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_\mu}(z) \bar{w}_\mu .$$

III.2.3.Satz: (Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Def.III.2.1.)

a) Ff ist stetig (sogar ein Element von $C^\infty(M,\mathbb{R})$).

b) Ist $i : Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossener Unterraum, $E_Y := i^*E$, so gilt: $Ff|\underline{E}_Y \cap M = F(f|E_Y)$.

c) Sei E ein Vektorbündel, $\varphi : E_V \to V \times \mathbb{C}^q$ eine Trivialisierung und $f_v^{(\varphi)} : \mathbb{C}^q \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_v^{(\varphi)}(w) := f(\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\pi}(v),w)$ für $v \in \underline{E}_V \cap M$. Dann ist $Ff(v) = \langle (\operatorname{grad} f_v^{(\varphi)})_{\mathrm{pr}_2 \circ \tilde{\varphi}(v)}, \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{\varphi}(v) \rangle$.

Beweis: Die Aussagen sind alle lokaler Natur. Sei $x_0 \in \underline{X}$, $j : U \hookrightarrow B$ eine komplexe Karte für X in $x_0 \in \underline{U}$ und $\varphi : E_U \hookrightarrow U \times \mathbb{C}^q$ eine Pseudotrivialisierung von E in x_0. Außerdem gebe es eine offene Menge $N \subset B \times \mathbb{C}^q$ mit $N \cap \tilde{J}(\underline{E}_U) = \tilde{J}(M)$ für $J := (j \times \mathrm{id}) \circ \varphi : E_U \hookrightarrow B \times \mathbb{C}^q$ und eine differenzierbare Funktion $\hat{f}$ auf N mit $\hat{f} \circ J = f$.

Ist $v \in M$ mit $\tilde{J}(v) = (z(v),w(v))$, so ist $\tilde{\tau}_E(v) = \tilde{H}_E(v,v)$, also $\widetilde{T(J)} \circ \tilde{\tau}_E(v) = H_{B \times \mathbb{C}^q}(z(v),w(v);z(v),w(v)) = (z(v),w(v);0,w(v))$ (vgl. §2, Kap.II).

Daraus folgt: $Ff(v) = (df)_v(\tilde{\tau}_E(v)) = (d\hat{f})_{(z(v),w(v))}(0,w(v)) =$

$= \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\partial \hat{f}}{\partial w_\mu}(\tilde{J}(v)) w_\mu(v) + \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{w}_\mu}(\tilde{J}(v)) \bar{w}_\mu(v)$. Also gilt:

a) $Ff = (\sum_{\mu=1}^{q} \frac{\partial \hat{f}}{\partial w_\mu} \cdot \mathrm{pr}_\mu^{(2)} + \sum_{\mu=1}^{q} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{w}_\mu} \cdot \overline{\mathrm{pr}}_\mu^{(2)}) \circ \tilde{J}$, und das ist eine differenzierbare stetige Funktion.

b) Sei $I := \mathrm{id} \times_X i : E_Y \hookrightarrow E$ die kanonische Einbettung. Wegen $(E_Y)_y = E_{\tilde{i}(y)}$ für $y \in \underline{Y}$ folgt aus Satz II.2.5., daß $\widetilde{T(I)}(\tilde{H}_{E_Y}(v,w)) = \tilde{H}_E(\tilde{I}(v),\tilde{I}(w))$ für $v,w \in (E_Y)_y$ ist. Hieraus erhält man: $\widetilde{T(I)} \circ \tilde{\tau}_{E_Y} = \tilde{\tau}_E \circ \tilde{I}$.

Damit gilt für $v \in \underline{E}_Y \cap M$: $F(f|E_Y)(v) = F(f \circ I)(v) = d(f \circ I)_v(\tilde{\tau}_{E_Y}(v)) =$

$= (df)_{\tilde{I}(v)}(\widetilde{T(I)} \circ \tilde{\tau}_{E_Y}(v)) = (df)_{\tilde{I}(v)}(\tilde{\tau}_E \circ \tilde{I}(v)) = Ff(\tilde{I}(v)) = (Ff|\underline{E}_Y \cap M)(v)$.

c) folgt trivial aus a). ▼

III.2.4.Satz: Sei U eine relativ-kompakte offene Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^m$. Es gebe eine offene Umgebung $V = V(\partial U) \subset \mathbb{C}^m$ und eine differenzierbare Funktion s auf V, so daß $V \cap U = \{z \in V : s(z) > 0\}$ und $\langle (\operatorname{grad} s)_z, z \rangle \neq 0$ für $z \in \partial U$ ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\overline{U}$ ist sternförmig in Bezug auf den Nullpunkt.
b) Für alle $z_o \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ ist $\partial U \cap \mathbb{C} z_o$ eine zu S^1 diffeomorphe differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C} z_o$.
c) Für alle $z_o \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ ist $\partial U \cap \mathbb{C} z_o$ zusammenhängend.
d) Für alle $z_o \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r z_o \in \partial U$.

Beweis: Für ein beliebig vorgegebenes $z_o \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ sei $\theta : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} z_o$ der durch $\theta(\lambda) := \lambda z_o$ definierte Vektorraumisomorphismus. Dann ist $U_o := \theta^{-1}(U \cap \mathbb{C} z_o)$ eine relativ-kompakte offene Umgebung von 0 in $\mathbb{C}$ und $V_o := \theta^{-1}(V \cap \mathbb{C} z_o)$ eine offene Umgebung von ∂U_o in $\mathbb{C}$. $g : V_o \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(\lambda) := s \circ \theta(\lambda) = s(\lambda z_o)$. Man ergänze nun z_o zu einer Basis $\{z_o, z_1, \ldots, z_{m-1}\}$ von $\mathbb{C}^m$ und definiere durch $z = \sum_{i=0}^{m-1} w_i(z) z_i$ neue Koordinaten $w_o, w_1, \ldots, w_{m-1}$ auf $\mathbb{C}^m$. Dann gilt für $z = \theta(\lambda)$:

$$\langle (\operatorname{grad} s)_z, z \rangle = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial s}{\partial w_i}(z) w_i(z) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial s}{\partial \overline{w}_i}(z) \overline{w}_i(z) = \frac{\partial s}{\partial w_o}(z)\lambda + \frac{\partial s}{\partial \overline{w}_o}(z)\overline{\lambda} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial \lambda}(\lambda)\lambda + \frac{\partial g}{\partial \overline{\lambda}}(\lambda)\overline{\lambda} = (dg)_\lambda (\Lambda_{\mathbb{C}}(\lambda, \lambda)).$$ Da nach Voraussetzung $(dg)_\lambda \neq 0$ für $\lambda \in \partial U_o$ ist, folgt: $Z := \partial U_o = \theta^{-1}(\partial U \cap \mathbb{C} z_o)$ ist eine kompakte reell 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}$.

a) $\Rightarrow$ b): Sei $S := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = S^1$. $\pi : \mathbb{C} - \{0\} \to S$ sei definiert durch $\pi(\lambda) := \frac{\lambda}{|\lambda|}$. Für $\lambda = x + iy$ ist $T_\lambda(\pi)$ in den kanonischen Koordinaten gegeben durch die Matrix

$$M_\lambda(\pi) := \frac{1}{|\lambda|} \cdot \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$

Da $\operatorname{rg} M_\lambda(\pi) = 1$ für $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ ist, ist $T_\lambda(\pi) : T_\lambda(\mathbb{C} - \{0\}) \to T_{\pi(\lambda)}(S)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ ein Epimorphismus. Da $\operatorname{Ker} T_\lambda(\pi) \cong \mathbb{R} \cdot \lambda$ und $T_\lambda(Z) \cong \{w \in \mathbb{C} : (dg)_\lambda (\Lambda_{\mathbb{C}}(\lambda, w)) = 0\}$ ist, folgt: $T_\lambda(Z) \cap \operatorname{Ker} T_\lambda(\pi) = \{0\}$, also $T_\lambda(\mathbb{C} - \{0\}) = T_\lambda(Z) \oplus \operatorname{Ker} T_\lambda(\pi)$. Daraus ergibt sich: $T_\lambda(\pi | Z) : T_\lambda(Z) \to T_{\pi(\lambda)}(S)$ ist ein Isomorphismus.

Um zu zeigen, daß $\pi | Z : Z \to S = S^1$ ein Diffeomorphismus ist, genügt es jetzt zu zeigen, daß $\pi | Z$ bijektiv ist. Die Surjektivität ist trivial, es bleibt die Injektivität zu zeigen.

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in Z$ mit $\pi(\lambda_1) = \pi(\lambda_2)$. Dann ist $\lambda_2 = r_o \lambda_1$ mit $r_o > 0$. Ist $r_o = 1$, so sind wir fertig. O.B.d.A. sei $r_o > 1$.

Alle Punkte $r\lambda_1$ mit $1 \leq r \leq r_o$ gehören zu $\overline{U}_o$, da mit $\overline{U}$ auch $\overline{U}_o$ sternförmig ist. Wenn es ein r_1 mit $1 < r_1 < r_o$ und $r_1 \lambda_1 \in U_o$ gibt, so kann man eine Kreisscheibe $B_\varepsilon = B_\varepsilon(r_1 \lambda_1) \subset U_o$ finden. Dann ist aber $\frac{1}{r_1} B_\varepsilon$ eine offene Umgebung von λ_1, die noch ganz zu $\overline{U}_o$ gehört. Es muß λ_1 in U_o liegen, und das

ist ein Widerspruch. Also ist $r\lambda_1 \in Z$ für alle r mit $1 \leq r \leq r_0$.

$f : [1, r_0] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(r) := g(r\lambda_1)$. Es ist $\frac{df}{dr}(r') = \frac{\partial g}{\partial \lambda}(r'\lambda_1)\lambda_1 + \frac{\partial g}{\partial \bar{\lambda}}(r'\lambda_1)\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{r'}(dg)_{r'\lambda_1}(\Lambda_{\mathbb{C}}(r'\lambda_1, r'\lambda_1)) \neq 0$ für alle $r' \in [1, r_0]$. Andererseits ist $f|[1, r_0] \equiv 0$, da g auf Z verschwindet. Das ergibt einen Widerspruch, es kann nicht $r_0 > 1$ sein!

b) $\Rightarrow$ c): trivial!

c) $\Rightarrow$ d): Behält man die oben eingeführten Bezeichnungen bei, so ist unter der Voraussetzung, daß Z zusammenhängend ist, zu zeigen, daß zu jedem $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ genau ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r\lambda_0 \in Z$ existiert.

Sei $W \subset\subset V_0$ eine offene Umgebung von Z in $\mathbb{C}$, $U_1 := V_0$, $U_2 := U_0 - \overline{W}$, $U_3 := \mathbb{C} - (\overline{U}_0 \cup \overline{W})$. Dann ist $\{U_1, U_2, U_3\}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{C}$. $\{e_1, e_2, e_3\}$ sei eine dazu passende Teilung der Eins. $h := g \cdot e_1 + e_2 - e_3$ ist eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{C}$ mit $h|W = g|W$, $h|U_0 > 0$, $h|(\mathbb{C} - \overline{U}_0) < 0$.

Es ist klar, daß es zu $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ mindestens ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r\lambda_0 \in Z$ gibt. Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \in Z$ mit $\lambda_2 = r_0\lambda_1$ und $r_0 > 1$. Außerdem sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(r) := h(r\lambda_1)$

Dann ist $\frac{df}{dr}(r') = \frac{1}{r'}(dh)_{r'\lambda_1}(\Lambda(r'\lambda_1, r'\lambda_1))$, insbesondere $\frac{df}{dr}(1) \neq 0$, $\frac{df}{dr}(r_0) \neq 0$. O.B.d.A. sei $\frac{df}{dr}(1) < 0$.

1.Fall: $\frac{df}{dr}(r_0) > 0$.

Da Z zusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $\sigma : [0,1] \to Z$ mit $\sigma(0) = \lambda_1$, $\sigma(1) = \lambda_2$. $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(t) := (dh)_{\sigma(t)}(\Lambda(\sigma(t), \sigma(t))) = (dg)_{\sigma(t)}(\Lambda(\sigma(t), \sigma(t)))$. F ist stetig, und es ist $F(0) = \frac{df}{dr}(1) < 0$, $F(1) = r_0 \frac{df}{dr}(r_0) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein t^* mit $0 < t^* < 1$ und $F(t^*) = 0$. Für $\lambda^* := \sigma(t^*)$ gilt dann: $\lambda^* \in Z$ und $(dg)_{\lambda^*}(\Lambda(\lambda^*, \lambda^*)) = 0$. Das ist ein Widerspruch, dieser Fall kann nicht eintreten. (Vgl. Fig.1)

2.Fall: $\frac{df}{dr}(r_0) < 0$.

Es ist $0 > \frac{df}{dr}(1) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\varepsilon}(f(1+\varepsilon) - f(1))$. Also gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß $f(1+\varepsilon) - f(1) < 0$ für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ist, und damit ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $1 + \varepsilon_1 < r_0$ und $f(1+\varepsilon_1) < f(1) = 0$.

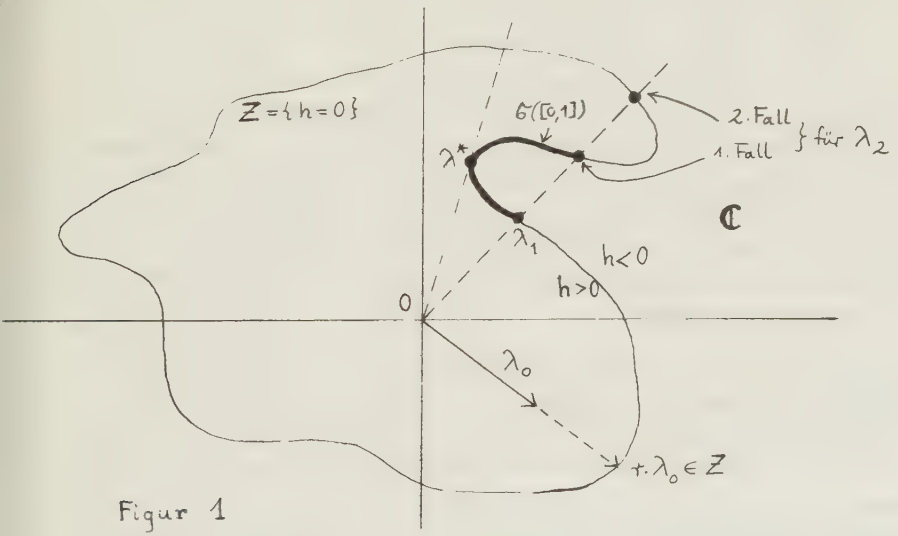
Analog gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$ mit $1 + \varepsilon_1 < r_0 - \varepsilon_2$ und $f(r_0 - \varepsilon_2) > f(r_0) = 0$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Existenz eines r_1 mit $1 + \varepsilon_1 < r_1 < r_0 - \varepsilon_2$ und $f(r_1) = 0$. Es ist $r_1\lambda_1 \in Z$, und man kann wieder schließen, daß $\frac{df}{dr}(\lambda_1) < 0$

sein muß.

Sei $\mathfrak{X} := \{r \in \mathbb{R} : 1 \leq r < r_0$, und es gibt eine Folge (r_ν) mit $1 < r_{\nu+1} < r_\nu$, $\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = r$, $f(r_\nu) = 0$, $\frac{df}{dr}(r_\nu) < 0\}$.

Die eben angestellten Betrachtungen zeigen, daß $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ ist. Sei $r_0 := \inf \mathfrak{X}$. Offensichtlich ist $f(r_0^*) = 0$ und $\frac{df}{dr}(r_0^*) \leq 0$. Zusammen ergibt das, daß $\frac{df}{dr}(r_0^*) < 0$ ist. Wäre $r_0^* > 1$, so könnte man von r_0^* ausgehend eine monoton fallende Folge konstruieren, deren Grenzwert wieder in $\mathfrak{X}$ liegen muß. Das ist ein Widerspruch zur Definition von r_0^*, es ist $r_0^* = 1$.

Sei nun (r_ν) eine Folge mit $1 < r_{\nu+1} < r_\nu$, $\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = 1$, $f(r_\nu) = 0$ und $\frac{df}{dr}(r_\nu) < 0$. Dann kann man eine Folge (r_ν^*) mit $r_{\nu+1} < r_\nu^* < r_\nu$ und $f(r_\nu^*) > 0$ finden. Daraus folgt: $\frac{df}{dr}(1) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{f(r_\nu^*) - f(1)}{r_\nu^* - 1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{f(r_\nu^*)}{r_\nu^* - 1} \geq 0$. Andererseits war $\frac{df}{dr}(1) < 0$. Das ist absurd. Es muß $\lambda_1 = \lambda_2$ sein!



Figur 1

d) ⇒ a): Sei $z \in \overline{U}$, $0 \leq r \leq 1$. Ist $z = 0$, $r = 0$ oder $r = 1$, so liegt offensichtlich rz wieder in $\overline{U}$. Sei $z \neq 0$, $0 < r_0 < 1$. Wir nehmen an, $r_0 z$ liegt nicht in $\overline{U}$. Sei $r_0^* := \sup\{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq r_0, rz \in \overline{U}\}$ und $r_0^{**} := \sup\{r \in \mathbb{R} : r_0 \leq r, rz \in \overline{U}\}$. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß $0 < r_0^* < r_0^{**}$ und $r_0^* z, r_0^{**} z \in \partial U$ ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\overline{U}$ ist sternförmig! ▼

Bemerkung: Der Satz läßt sich völlig analog beweisen, wenn $V \cap U = \{z \in V : s(z) < 0\}$ ist.

III.2.5.Lemma:

a) Sei $M \subset \mathbb{C}^m$ eine bezüglich 0 sternförmige Menge. Dann sind auch $\overset{o}{M}$ und $\overline{M}$ sternförmig.

b) Seien $M_i \subset \mathbb{C}^m$ bezüglich o sternförmige Mengen, $i \in I$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ sternförmig.

Der Beweis ist trivial.

III.2.6.Lemma: Sei X eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit, $Y \subset X$ ein mindestens 1-codimensionaler komplexer Unterraum, $y_0 \in Y$, $y_1 \in X-Y$. Dann gibt es eine differenzierbare Einbettung $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = y_1$ und $\alpha(]0,1[) \subset X-Y$.

Beweis: O.B.d.A. sei $X = B$ ein Bereich im $\mathbb{C}^n$, $y_0 = 0$. Y werde in B durch holomorphe Funktionen $f_1,\dots,f_q$ beschrieben, $q \geq 1$. Es gibt eine offene Umgebung $U(0) \subset B$, offene Mengen $U'(0) \subset \mathbb{C}^{n-1}$, $U''(0) \subset \mathbb{C}$ und eine biholomorphe Abbildung $\Phi : U \to U' \times U''$ mit $\Phi(0) = 0$, so daß $f_1 \circ \Phi^{-1} = e \cdot \omega$ mit einer nirgends verschwindenden holomorphen Funktion e und einem Pseudopolynom $\omega = \omega(z_1,\dots,z_{n-1},z_n) = \sum_{i=0}^{N} a_i(z_1,\dots,z_{n-1}) z_n^i$ ist. Sei $\alpha_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ der durch $\alpha_1(t) := (0,\dots,0,t)$ gegebene differenzierbare Weg. Man kann ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß $\alpha_1([0,\varepsilon]) \cap \{z \in U' \times U'' : \omega(z) = 0\} = \{0\}$ ist. Sei $\alpha_2 := \Phi^{-1} \circ \alpha_1 : [0,\varepsilon] \to U$. Es ist $\alpha_2([0,\varepsilon]) \cap Y = \{y_0\}$. Da B-Y zusammenhängend ist, kann man einen Weg $\alpha_3 : [\varepsilon,1] \to B$ mit $\alpha_3(\varepsilon) = \alpha_2(\varepsilon)$, $\alpha_3(1) = y_1$ und $\alpha_3([\varepsilon,1]) \subset B-Y$ finden, so daß α_3 sogar eine Einbettung ist. Der aus α_2 und α_3 zusammengesetzte Weg kann ohne Schwierigkeiten bei $t = \varepsilon$ innerhalb B-Y geglättet werden. Man erhält dann einen Weg α mit den gewünschten Eigenschaften. ▼

III.2.7.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum. E heißt genügend q-konkav (bzw. q-konvex), falls es eine offene Umgebung $U = U(\omega_E(X)) \subset E$ gibt, so daß gilt:

a) Für alle $x \in X$ ist $\overline{U \cap E_x}$ relativ-kompakt und sternförmig in Bezug auf den Nullpunkt in E_x.

b) Es gibt eine offene Umgebung $V = V(\partial U) \subset E$ und eine q-konvexe Funktion $s \in \Gamma(V, \mathcal{D}_E)$ mit $V \cap U = \{v \in V : s(v) > 0\}$ (bzw. mit $V \cap U = \{v \in V : s(v) < 0\}$ im konvexen Fall), so daß $Fs(v) \neq 0$ für alle $v \in \partial U$ ist.

Die etwas technisch anmutenden Bedingungen von Definition III.2.7. sind in wichtigen Fällen erfüllt, wie wir noch zeigen werden. Wichtigstes Ergebnis dieses Abschnittes ist aber der folgende Satz:

III.2.8.Theorem: Sei X eine (parakompakte) komplexe Mannigfaltigkeit, $Y \subset X$ ein beliebiger abgeschlossener komplexer Unterraum. Ist das Normalenbündel $N_X(Y)$ genügend q-konkav (bzw. genügend q-konvex), so gibt es eine differenzierbare Funktion $f : X-Y \to \mathbb{R}_+$ und eine offene Umgebung $M = M(Y) \subset X$, so daß gilt:

a) Für $x \in M-Y$ hat $Lev_x(f)$ auf $H_x(f)$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 (bzw. ≥ 0)

b) Ist $x_0 \in Y$ und (x_ν) eine Folge von Punkten aus M-Y mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$, so ist $\{f(x_\nu), \nu \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt.

Ist X zusätzlich kompakt, so ist X-Y q-konvex (bzw. q-konkav)

Beweis:Es gibt eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}_X$, durch die Y definiert wird. Sei $i : Y \hookrightarrow X$ die Einbettung, $L := \mathrm{Lin}(\mathcal{J})$, $N := N_X(Y)$. Dann ist $N = L \times_X Y$, und $i_0 = \mathrm{id} \times_X i : N \to L$ ist ebenfalls eine Einbettung.
O.B.d.A. seien X und Y zusammenhängend.

Nach Voraussetzung ist N genügend q-konkav (bzw. genügend q-konvex). U, V und s seien wie in Definition III.2.7. gewählt. Nach dem Fortsetzungssatz I.3.9. gibt es eine offene Menge $W \subset \underline{L}$ mit $W \cap \underline{N} = V$ und eine q-konvexe Funktion $\hat{s}$ auf W mit $\hat{s}|N = s$. Nach Satz III.2.3. ist $F\hat{s}|V = F(\hat{s}|N) = Fs$, also $F\hat{s}|\partial U \neq 0$. Wegen der Stetigkeit der Faserableitung kann man o.B.d.A. annehmen, daß $F\hat{s}(v) \neq 0$ für alle $v \in W$ ist.

Wir führen nun den Beweis in mehreren Schritten.

1) Sei $y \in \underline{Y}$, $B = B(y) \subset X$ eine offene Umgebung, so daß es eine Pseudotrivialisierung $L_B \hookrightarrow B \times \mathbb{C}^m$ von L in y gibt. Wir fassen $\underline{L}_B$ als Teilmenge von $B \times \mathbb{C}^m$ auf. $U_y := U \cap L_y \subset L_y = \mathbb{C}^m$ ist eine relativ-kompakte sternförmige offene Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^m$. $V^-_{y,\varepsilon} := (1-\varepsilon)\cdot U_y$ und $V^+_{y,\varepsilon} := (1+\varepsilon)\cdot U_y$ sind dann ebenfalls sternförmige Nullumgebungen.

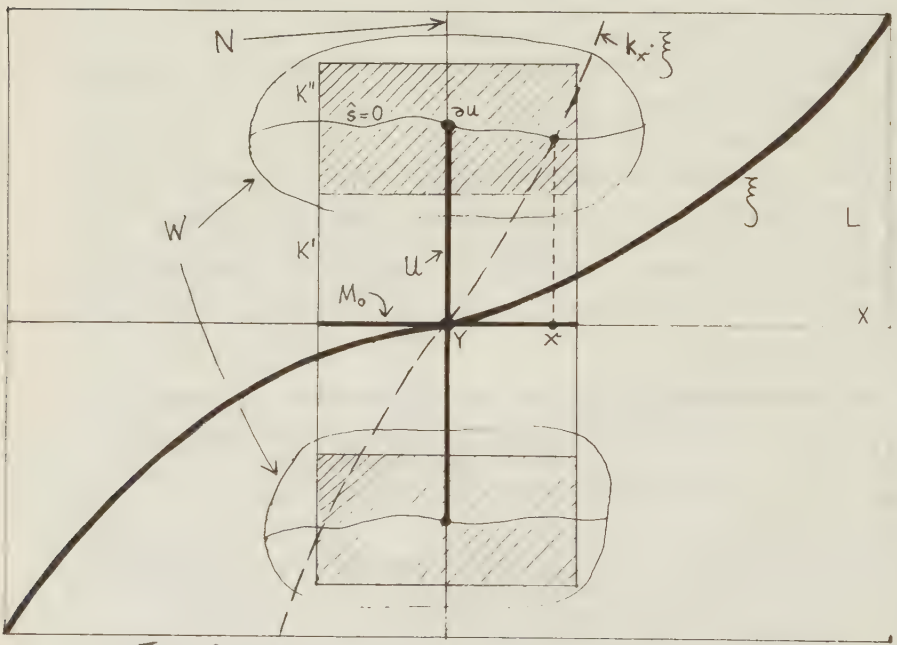
Es gibt eine offene Menge $W_y \subset B \times \mathbb{C}^m$ und eine differenzierbare Funktion s_y auf W_y, so daß $W_y \cap \underline{L}_B = W \cap \underline{L}_B$ und $s_y|W_y \cap \underline{L}_B = \hat{s}|W \cap \underline{L}_B$ ist. Insbesondere ist $W_y \cap L_y = V \cap L_y$ eine offene Umgebung von $\partial U \cap L_y = \partial(U \cap L_y)$.
Man kann nun eine Umgebung B' von y in X und ein $\varepsilon > 0$ finden, so daß $B' \subset\subset B$ ist, sowie $\overline{B}' \times (\overline{V}^+_{y,\varepsilon} - V^-_{y,\varepsilon}) \subset W_y$, $s_y|\overline{B}' \times \partial V^-_{y,\varepsilon} > 0$ (bzw. < 0 im konvexen Fall) und $s_y|\overline{B}' \times \partial V^+_{y,\varepsilon} < 0$ (bzw. > 0 im konvexen Fall).

Zu jedem $y \in Y$ seien B, B' und ε fest gewählt. Man kann ein System von Punkten $(y_\iota)_{\iota \in I}$ finden, so daß (B_ι) lokal-endlich und (B'_ι) eine Überdeckung von Y ist. Es sei $V^+_\iota := V^+_{y_\iota,\varepsilon_\iota}$, $V^-_\iota := V^-_{y_\iota,\varepsilon_\iota}$.
Sei $M_0 := \bigcup_{\iota \in I} B'_\iota$. Für $x \in M_0$ sei $I(x) := \{\iota \in I : x \in B'_\iota\}$. $I(x)$ ist stets

endlich. Setzt man $K' := \bigcup_{\iota\in I}((B'_\iota \times V_\iota^-)\cap L)$ und $K'' := \bigcup_{\iota\in I}((B'_\iota \times V_\iota^+)\cap L)$, so folgt für $x\in M_o$: $K'\cap L_x = \bigcup_{\iota\in I(x)} K'_{\iota,x}$, $K''\cap L_x = \bigcup_{\iota\in I(x)} K''_{\iota,x}$, wenn man $K'_{\iota,x} := (B'_\iota \times V_\iota^-)\cap L_x$ und $K''_{\iota,x} := (B'_\iota \times V_\iota^+)\cap L_x$ für $x\in B'_\iota$ setzt.

$K'_{\iota,x}$, $K''_{\iota,x}$ sind relativ-kompakte offene bezüglich 0_x sternförmige Mengen in L_x mit $K'_{\iota,x} \subset\subset K''_{\iota,x}$, $\overline{K''_{\iota,x}} - K'_{\iota,x} \subset W\cap L_x$ und $\hat{s}\,|\,\partial K'_{\iota,x} > 0$ (bzw. < 0 im konvexen Fall) und $\hat{s}\,|\,\partial K''_{\iota,x} < 0$ (bzw. > 0 im konvexen Fall)

Unter Verwendung von Lemma III.2.5. erhält man: K', K" sind offene Umgebungen von $\underline{Y}$ in $\underline{L}$ mit $M_o \subset K' \subset K''$, und für jedes $x\in M_o$ gilt: $K'\cap L_x$, $K''\cap L_x$ sind relativ-kompakte offene bezüglich 0_x sternförmige Mengen in L_x mit $K'\cap L_x \subset\subset K''\cap L_x$ und $\overline{K''\cap L_x} - K'\cap L_x \subset W\cap L_x$, sowie $\hat{s}\,|\,\partial(K'\cap L_x) > 0$ (bzw. < 0 im konvexen Fall) und $\hat{s}\,|\,\partial(K''\cap L_x) < 0$ (bzw. > 0 im konvexen Fall).



Figur 2

2) Nach Satz II.1.8. gibt es einen Isomorphismus $\theta : L_{X-Y} \to (X-Y)\times\mathbb{C}$ und ein $\xi\in\Gamma(X,L)$ mit $\xi\,|\,Y = \omega_L\circ i$ und $\theta\circ\xi\,|\,(X-Y) = (id,1)$.

Sei $D := \{(k,x)\in\,]0,\infty[\,\times(M_o-\underline{Y}) : k\cdot\xi(x)\in K'' - \overline{K'}\}$. Da $\xi(x)\neq 0_x$ für $x\in M_o-\underline{Y}$ ist, gibt es zu jedem $x\in M_o-\underline{Y}$ ein $k>0$ mit $k\cdot\xi(x)\in K''\cap L_x - \overline{K'\cap L_x}$.

Setzt man $\Psi(k,x) := k \cdot \xi(x)$ für $(k,x) \in \left]0,\infty\right[\times (M_o - \underline{Y})$, so ist $D = \Psi^{-1}(K''-\overline{K'})$ offen in $\left]0,\infty\right[\times (M_o - \underline{Y})$, also eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. $\hat{s}$ ist auf $\Psi(D)$ definiert. Sei $\phi := \hat{s} \circ \Psi : D \to \mathbb{R}$. ϕ ist eine differenzierbare Funktion, und da für jedes $x \in M_o - \underline{Y}$ die Mengen $K' \cap L_x$, $K'' \cap L_x$ sternförmig und relativ-kompakt ineinander enthalten sind, gibt es Zahlen k_1, $k_2 > 0$ mit $(k_1,x) \in D$ und $\phi(k_1,x) > 0$ (bzw. < 0 im konvexen Fall) und $\phi(k_2,x) < 0$ (bzw. > 0 im konvexen Fall). Für alle Zahlen k mit $k_1 < k < k_2$ muß (k,x) ebenfalls in D liegen, und das bedeutet wegen der Stetigkeit von ϕ, daß es ein k_x mit $k_1 < k_x < k_2$ und $\phi(k_x,x) = 0$ gibt.

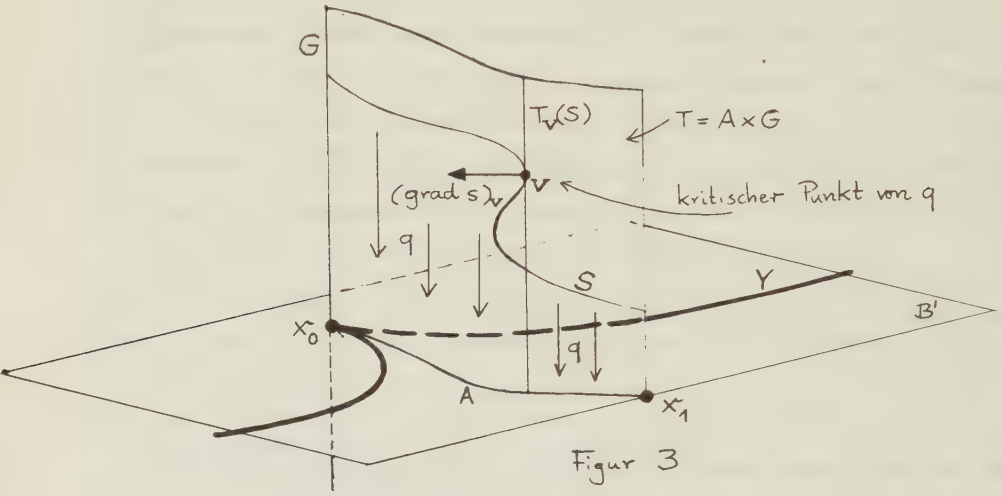
3) Es soll nun gezeigt werden, daß für jedes $x \in M_o - \underline{Y}$ die Menge $\{v \in L_x \cap K'' - \overline{L_x \cap K'} : \hat{s}(v) = 0\}$ zusammenhängend ist:

Sei $x_o \in \underline{Y}$, $B = B(x_o) \subset M_o$ so gewählt, daß es eine Pseudotrivialisierung $j : L_B \hookrightarrow B \times \mathbb{C}^m$ von L in x_o gibt.
R', R'' seien offene Umgebungen von $B \times \{0\}$ in $B \times \mathbb{C}^m$, so daß gilt: $R' \cap \underline{L}_B = K' \cap \underline{L}_B$, $R'' \cap \underline{L}_B = K'' \cap \underline{L}_B$ und $\overline{R'' \cap L_x} - R' \cap L_x = \overline{K'' \cap L_x} - K' \cap L_x$ für alle $x \in B$. $\tilde{s}$ sei eine differenzierbare Funktion auf $B \times \mathbb{C}^m$ mit $\tilde{s}\big|(\overline{K''}-K') \cap \underline{L}_B = \hat{s}\big|(\overline{K''}-K') \cap \underline{L}_B$ (Die abgeschlossene Hülle ist jeweils in der Topologie von $B \times \mathbb{C}^m$ zu bilden!). Indem man gegebenenfalls zu einer kleineren Umgebung $B'(x_o) \subset B$ übergeht, kann man erreichen, daß $F\tilde{s}(v) \neq 0$ für alle $v \in (\overline{R''}-R') \cap (B' \times \mathbb{C}^m)$ ist.

Sei nun $x_1 \in B'-Y$ beliebig gewählt. Nach Lemma III.2.6. gibt es eine differenzierbare Einbettung $\alpha : \left[0,1\right] \to B'$ mit $\alpha(0) = x_o$, $\alpha(1) = x_1$ und $\alpha(\left]0,1\right[) \subset B'-Y$.

Sei $G \subset \mathbb{C}^m$ eine komplexe Gerade. Da $A := \alpha(\left[0,1\right])$ eine reell 1-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand von B' ist, ist $T := A \times G$ mit der Produktstruktur (die mit der von $B' \times \mathbb{C}^m$ induzierten Struktur übereinstimmt) eine reell 3-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. $p : T \to \left[0,1\right]$ mit $p(\alpha(t),z) := t$ ist eine differenzierbare Abbildung. Sei $S := \{(\alpha(t),z) \in T : \tilde{s}(\alpha(t),z) = 0\} \cap (R''-\overline{R'})$. Da $R''-\overline{R'}$ offen und $F\tilde{s}(v) \neq 0$ für alle $v \in (\overline{R''}-R') \cap (B' \times \mathbb{C}^m)$ ist, ist S eine 2-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand von T. $q := p\big|S : S \to \left[0,1\right]$

ist eine differenzierbare Abbildung. Wir zeigen, daß q eine Morse-Funktion für $(S,q^{-1}(0),q^{-1}(1))$ ohne kritische Punkte ist (vgl. [12]):



Figur 3

Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}^m - \{0\}$, so daß $G = \mathbb{C}z_0$ ist. Durch $(\alpha(t), \lambda z_0) \longmapsto$ $\longmapsto (t, \text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda)$ erhält man Koordinaten für T. Sei nun $\mathcal{A} \in T_v(S) \subset T_v(T)$ für ein $v = (x,z) \in S$. Dann kann man schreiben: $\mathcal{A} = a\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$. Es ist $T_v(q)(\mathcal{A}) = T_{(x,z)}(p)(a\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}) = a\frac{\partial}{\partial t}$. $T_v(q)(\mathcal{A}) = 0$ bedeutet also, daß $\mathcal{A} = c\frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}$ ist. Ist außerdem $\mathcal{A} \neq 0$, so ist $c \neq 0$. Wir nehmen nun an, daß $v = (x,z)$ ein kritischer Punkt von q ist. Dann ist $T_v(q) = 0$, also $T_v(S) \subset T_v(\{x\} \times G)$. Da andererseits $T_v(S)$ 2-dimensional ist, folgt: $T_v(S) = T_v(\{x\} \times G)$. Sei $z = \lambda_0 \cdot z_0$, $\{z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^m$ und $\varphi : B' \times \mathbb{C}^m \longrightarrow B' \times \mathbb{C}^m$ definiert durch $\varphi(x, \lambda z_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i z_i) := (x; \lambda, \lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_{m-1})$. Dann ist $\varphi(v) = (x; \lambda_0, \ldots, 0)$ und $\tilde{s}_v^{(\varphi)}(w_0, \ldots, w_{m-1}) =$ $= \tilde{s}(x, w_0 z_0 + \sum_{i=1}^{m-1} w_i z_i)$, also $F\tilde{s}(v) = \frac{\partial \tilde{s}_v^{(\varphi)}}{\partial w_0}(\lambda_0, 0, \ldots, 0) \cdot \lambda_0 + \frac{\partial \tilde{s}_v^{(\varphi)}}{\partial \bar{w}_0}(\lambda_0, 0, \ldots, 0)\, \bar{\lambda}_0$.

Es ist $T_v(S) = \{\mathcal{A} = c\frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \in T_v(T) : d(\tilde{s}|T)_v(\mathcal{A}) = 0\} =$

$= \{\mathcal{A} = c\frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \in T_v(T) : c\frac{\partial \tilde{s}_v^{(\varphi)}}{\partial w_0}(\lambda_0, 0, \ldots, 0) + \bar{c}\frac{\partial \tilde{s}_v^{(\varphi)}}{\partial \bar{w}_0}(\lambda_0, 0, \ldots, 0) = 0\}$.

Wegen $\lambda_0 \frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{\lambda}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \in T_v(\{x\} \times G) = T_v(S)$ folgt: $F\tilde{s}(v) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch!

Mithin hat q keine kritischen Punkte, und aus der Morse-Theorie folgt, daß

$q^{-1}(0)$ und $q^{-1}(1)$ diffeomorph sind. Nun ist $q^{-1}(0) = (\{x_0\}\times G)\cap(K''-\overline{K'})\cap\{v\in\underline{N} : s(v) = 0\}$ zusammenhängend (Voraussetzung und Satz III.2.4.). Setzt man speziell $G = L_{x_1}$, so erhält man, daß $q^{-1}(1) = \{v\in L_{x_1}\cap(\overline{K''}-K') : \hat{s}(v) = 0\}$ ebenfalls zusammenhängend ist.

Ist $x\in M_0-\underline{Y}$ beliebig, so kann man x in $M_0-\underline{Y}$ mit einem Punkt x_1 nahe bei $\underline{Y}$ verbinden und in ähnlicher Weise wie oben folgern, daß auch $\{v\in L_x\cap(\overline{K''}-K') : \hat{s}(v) = 0\}$ zusammenhängend ist.

4) Aus 3) folgt mit Satz III.2.4., daß zu jedem $x\in M_0-\underline{Y}$ genau ein $r_x\in\mathbb{R}_+$ existiert, so daß $(r_x,x)\in D$ und $\Phi(r_x,x) = 0$ ist.

Sei $f_0 : M_0-\underline{Y}\to\mathbb{R}_+$ definiert durch $f_0(x) := r_x$. Wir zeigen, daß f_0 differenzierbar ist:

$\psi :]0,\infty[\times(M_0-\underline{Y})\to(M_0-\underline{Y})\times\mathbb{C}$ mit $\psi(k,x) := \tilde{\theta}(k\cdot\tilde{\xi}(x)) = (x,k)$ ist eine differenzierbare Abbildung, $h := \hat{s}\circ\tilde{\theta}^{-1} : ((M_0-\underline{Y})\times\mathbb{C})\cap\tilde{\theta}(W)\to\mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion, und für $(k,x)\in D$ ist $h\circ\psi(k,x) = \Phi(k,x)$. Daraus folgt: $\frac{\partial\Phi}{\partial k}(k,x) = \frac{\partial h}{\partial c}(x,k) + \frac{\partial h}{\partial\overline{c}}(x,k) = \frac{1}{k}\cdot F\hat{s}(k\cdot\tilde{\xi}(x)) \neq 0$ auf D.
Zu festem $(k_1,x_1)\in D$ gibt es daher nach dem Satz über implizite Funktionen eine offene Umgebung $U_1(k_1,x_1)\subset D$ und eine offene Umgebung $U_2(x_1)\subset M_0-\underline{Y}$, sowie eine differenzierbare Funktion $\tilde{f} : U_2\to\mathbb{R}$, so daß $\{(k,x)\in U_1 : \Phi(k,x) = 0\} = \{(\tilde{f}(x),x) : x\in U_2\}$ ist. Da für $x\in U_2$ gilt, daß genau dann $\Phi(k,x) = 0$ ist, wenn $k = f_0(x)$ ist, folgt: $f_0 : M_0-\underline{Y}\to\mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Sei $M = M(Y)\subset\underline{X}$ eine offene Umgebung mit $\overline{M}\subset M_0$. Mit $U_1 := M_0-\underline{Y}$, $U_2 := X-\overline{M}$ erhält man dann eine offene Überdeckung $\{U_1,U_2\}$ von X-Y. $\{e_1,e_2\}$ sei eine passende Teilung der Eins dazu. $f := f_0\cdot e_1 + e_2$ ist eine differenzierbare Funktion auf X-Y mit Werten in $\mathbb{R}_+$, und es ist $f|M-\underline{Y} = f_0|M-\underline{Y}$.

5) Sei $x_0\in M-\underline{Y}$ vorgegeben. Wir zeigen, daß $\mathrm{Lev}_{x_0}(f)$ auf $H_{x_0}(f)$ höchstens q-1 Eigenwerte ≤ 0 hat (bzw. ≥ 0 im konvexen Fall).

1.Fall: $(d'f)_{x_0} = 0$.
Sei $g_0(x) := \hat{s}(f(x_0)\cdot\tilde{\xi}(x))$ auf einer geeigneten offenen Umgebung $Q(x_0)\subset\underline{X}$. $\Phi_0 := f(x_0)\cdot\tilde{\xi} : Q\to L$ ist eine Einbettung und $\hat{s}$ ist q-konvex in $\tilde{\Phi}_0(x_0)$. Also ist auch $g_0 = \hat{s}\circ\Phi_0$ q-konvex in x_0. Da $\{x\in Q : f(x) < f(x_0)\} = \{x\in Q : g_0(x) < 0\}$ (bzw. $\{x\in Q : f(x) < f(x_0)\} = \{x\in Q : -g_0(x) < 0\}$ im

konvexen Fall) ist, folgt aus Lemma I.4.9., daß $\mathrm{Lev}_{x_o}(f)$ auf $H_{x_o}(f)$ höchstens q-1 Eigenwerte $\lesseqgtr 0$ (bzw. $\gtreqless 0$) besitzt.

2.Fall: $(d'f)_{x_o} = 0$.

$\mathcal{Q}$ und g_o seien wie oben definiert. $G : Q \to D$ sei gegeben durch $G(x) := (f(x),x)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{(\frac{\partial \Phi}{\partial k}\circ G)}\cdot(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}\circ G) \quad \text{auf } Q \text{ (für beliebige Ableitungen } \frac{\partial}{\partial x_\nu}\text{)}$$

Insbesondere ist $\frac{\partial \Phi}{\partial z_\nu}(x_o) = 0$ für alle ν.

Weiter folgt: $\frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} = \frac{\partial}{\partial z_\nu}\left(-\frac{1}{(\frac{\partial \Phi}{\partial k}\circ G)}\cdot(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_\mu}\circ G)\right) = \frac{1}{(\frac{\partial \Phi}{\partial k}\circ G)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z_\nu}(\frac{\partial \Phi}{\partial k}\circ G)\cdot(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_\mu}\circ G) -$

$-\frac{1}{(\frac{\partial \Phi}{\partial k}\circ G)}\cdot\frac{\partial}{\partial z_\nu}(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_\mu}\circ G)$. Wegen $\frac{\partial}{\partial z_\nu}(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_\mu}\circ G) = (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial k \partial \bar{z}_\mu}\circ G)\frac{\partial f}{\partial z_\nu} + \sum_\lambda(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_\lambda \partial \bar{z}_\mu}\circ G)\frac{\partial z_\lambda}{\partial z_\nu}$

erhält man: $\frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(x_o) = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial k}(f(x_o),x_o)}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu}(f(x_o),x_o)$,

also $\mathrm{Lev}_{x_o}(f) = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial k}(f(x_o),x_o)}\cdot\mathrm{Lev}_{x_o}(g_o)$.

$g_o = \hat{s}\circ\Phi_o$ ist q-konvex in x_o. Wegen $H_{x_o}(f) = T_{X,x_o}$ genügt es zu zeigen, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial k}(f(x_o),x_o) < 0$ (bzw. > 0) ist. Sei $h(k) := \Phi(k,x_o)$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $h(k) > 0$ (bzw. < 0) für $f(x_o) - \varepsilon < k < f(x_o)$ ist. Außerdem ist $h(f(x_o)) = 0$. Daraus folgt:

$$0 \neq \frac{\partial \Phi}{\partial k}(f(x_o),x_o) = \frac{dh}{dk}(f(x_o)) = \lim_{\substack{t\to 0\\ 0<t<\varepsilon}}\frac{h(f(x_o)-t}{-t} \lesseqgtr 0 \text{ (bzw. } \gtreqless 0).$$

Damit hat $\mathrm{Lev}_{x_o}(f)$ auch in diesem Fall auf $H_{x_o}(f)$ höchstens q-1 Eigenwerte $\lesseqgtr 0$ (bzw. $\gtreqless 0$).

6) Sei $x_o \in \underline{Y}$, (x_ν) eine Folge von Punkten aus $M-\underline{Y}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_o$. Sei $B = B(x_o) \subset X$ offen, so daß eine Pseudotrivialisierung $L_B \hookrightarrow B\times\mathbb{C}^m$ in x_o existiert. O.B.d.A. liegen alle x_ν in B. Man kann schreiben: $\xi\,|\,B = (\mathrm{id}, \xi_*)$ mit einer holomorphen Abbildung $\xi_* : B \to \mathbb{C}^m$. Wäre $\{f(x_\nu), \nu\in\mathbb{N}\}$ beschränkt, so wäre $\lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu)\cdot\xi_*(x_\nu) = 0$. Andererseits ist $(x_\nu, f(x_\nu)\,\xi_*(x_\nu)) \in (\overline{K''}-K')\cap L_B$ für alle ν. Das ist ein Widerspruch, $\{f(x_\nu), \nu\in\mathbb{N}\}$ ist unbeschränkt. Somit erfüllt f alle geforderten Bedingungen.

Es sei jetzt X zusätzlich als kompakt vorausgesetzt. Für $c\in\mathbb{R}$ sei $X_c := \{x\in X-Y : f(x) < c\}$. $\mathrm{Cl}_X(X_c)$ sei die abgeschlossene Hülle von X_c in X, $\mathrm{Cl}_{X-Y}(X_c)$ die abgeschlossene Hülle von X_c in X-Y. Offensichtlich ist $\mathrm{Cl}_{X-Y}(X_c)$

$\subset$ X-Y und $Cl_X(X_c)$ kompakt, sowie $Cl_{X-Y}(X_c) \subset Cl_X(X_c)$. Ist $x_o \in Cl_X(X_c)$, so liegt x_o in $\underline{X}$ und es gibt eine Folge (x_ν) in X_c mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_o$. Wäre x_o Element von $\underline{Y}$, so müßte $\{f(x_\nu), \nu\in\mathbb{N}\}$ unbeschränkt sein. Da aber $f(x_\nu) < c$ für alle $\nu\in\mathbb{N}$ ist, liegt x_o in X-Y, d.h., es ist $Cl_X(X_c) = Cl_{X-Y}(X_c)$, also $X_c \subset\subset$ X-Y.

Aus Satz I.4.8. folgt schließlich, daß X-Y ein q-konvexer (bzw. q-konkaver) Raum ist. ▼

III.2.9.Definition: Sei X ein komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum. Dann heiße $rg(E) := \inf_{x\in\underline{X}} \dim_{\mathbb{C}}(E_x)$ der Minimalrang von E, $Rg(E) := \sup_{x\in\underline{X}} \dim_{\mathbb{C}}(E_x)$ der Maximalrang von E.

Bemerkung: Es ist $0 \leq rg(E) \leq Rg(E)$. Ist X zusammenhängend, so ist $\dim_{\mathbb{C}}(E_x) = rg(E)$ außerhalb einer niederdimensionalen analytischen Teilmenge von X. Ist E ein Vektorbündel, so ist $rg(E) = Rg(E)$.

III.2.10.Satz: Sei X ein kompakter komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein linearer Raum, $q := Rg(E)$. Ist E r-positiv, so ist E genügend (q+r-1)-konkav.

Beweis: Definitionsgemäß gibt es auf E ein Skalarprodukt h, so daß für alle $x\in\underline{X}$ gilt:
Ist $\varphi : E_U \hookrightarrow U\times\mathbb{C}^p$ eine bezüglich h in x normale Pseudotrivialisierung von E, so besitzt $Lev_v(\chi_h)$ für jedes $v\in E_x - \{0\}$ auf $B_v^{(\varphi)}(E)$ höchstens r-1 nicht-negative Eigenwerte.

Sei nun $v_o \in \underline{E} - \omega_{\underline{E}}(X)$ beliebig gewählt, $s := \chi_h(v_o) - \chi_h$ und $\varrho_c := s\cdot e^{cs}$, wobei c eine noch geeignet zu wählende Konstante ist. Sei $W := \{v\in\underline{E}: \varrho_c(v) > 0\}$. Dann ist $W = \{v\in\underline{E} : s(v) > 0\} = \{v\in\underline{E} : \chi_h(v) < \chi_h(v_o)\} \subset\subset \underline{E}$ eine offene Umgebung des Nullschnittes.

Sei $v\in\partial W$, $\tilde{\pi}(v) = x$ und $\varphi : E_U \hookrightarrow U\times\mathbb{C}^p$ wie oben eine Pseudotrivialisierung von E in x, h_φ eine lokale Darstellung von h bezüglich φ, so daß φ vermöge h_φ normal in x bezüglich h ist. O.B.d.A. gibt es eine spezielle komplexe Karte $j : U \hookrightarrow B$ für X in x und eine differenzierbare Abbildung $H : U \to GL(p,\mathbb{C})$ mit $H\circ j = h_\varphi$.

φ induziert eine Zerlegung $T_{E,v} = B_v^{(\varphi)}(E) \oplus T(E/X)_v$. Für $\xi\in T_{E,v}$ schreiben wir $\xi = (\xi', \xi'')$. Außerdem sei $\varphi(v) = (x,w)$. Es ist $(d\varrho_c)_v(\xi) = (ds)_v(\xi) = -(d\chi_h)_v(\xi) = -(d\chi_H)_w(\xi', \xi'') = -2\,\mathrm{Re}(\sum_{\lambda=1}^{p} w_\lambda \overline{\xi}_\lambda'')$, insbesondere $F\varrho_c(v) = (d\varrho_c)_v(\tilde{\tau}_E(v)) = -2\sum_{\lambda=1}^{p}|w_\lambda|^2 \neq 0$ für $v \neq 0_x$.

Weiter ist $\mathrm{Lev}_v(\varrho_c)(\xi,\xi) = \mathrm{Lev}_v(s)(\xi,\xi) + 2c\,|(d's)_v(\xi)|^2 =$
$= -\mathrm{Lev}_v(\chi_h)(\xi,\xi) + 2c\cdot|(d'\chi_h)_v(\xi)|^2$. Sei $m := \dim B_v^{(\varphi)}(E)$. Es gibt einen $(m-r+1)$-dimensionalen Unterraum F_v von $B_v^{(\varphi)}(E)$, so daß $\mathrm{Lev}_v(\chi_h)$ auf F_v negativ definit ist. Offensichtlich ist F_v in $H_v(\varrho_c)$ enthalten. Sei $T_{E,v} = H_v(\chi_h)\oplus G_v$, $L_v := F_v\oplus G_v$. Dann ist $\dim L_v = (m-r+1) + 1 = (m+p) - (p+r-1) + 1$.

Sei $Q(\xi) := -\mathrm{Lev}_v(\chi_h)(\xi,\xi)$ und $\lambda(\xi) := (d'\chi_h)_v(\xi)$. Es ist $\{\xi\in L_v : \lambda(\xi) = 0\} = F_v$ und Q auf F_v positiv definit, damit sind alle Voraussetzungen von Lemma I.3.8. erfüllt. Es gibt also ein c_o, so daß $P_c(\xi) := Q(\xi) + 2c\cdot|\lambda(\xi)|^2 > 0$ auf $L_v - \{0\}$ für $c \geq c_o$ ist. ϱ_c ist in v $(p+r-1)$-konvex (und damit erst recht $(q+r-1)$-konvex) für $c \geq c_o$. Da ∂W kompakt ist, kann man sogar ein c_o finden, so daß ϱ_c für alle $c \geq c_o$ auf ganz ∂W $(q+r-1)$-konvex ist. Wählt man eine Umgebung $V = V(\partial W)\subset E$, so daß ϱ_{c_o} noch auf V $(q+r-1)$-konvex ist, so sind fast alle Bedingungen von Def. III.2.7. erfüllt. Daß aber $\overline{W\cap E}_x = \{v\in E_x : \chi_h(v) \leq \chi_h(v_o)\}$ sternförmig ist, ist trivial. Damit ist E genügend $(q+r-1)$-konkav. ▼

§ 3 Beispiele

III.3.1.Definition: Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}_X$ eine kohärente Idealgarbe, Y der durch $\mathcal{F}$ definierte Unterraum. Dann definiert man (sofern diese Zahl endlich ist): $\mathrm{Cg}(Y) := \sup_{y\in Y} \mathrm{cg}(\mathcal{F}_y)$

Faßt man die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhält man:

III.3.2.Satz: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $Y\subset X$ ein komplexer Unterraum, $q = \mathrm{Cg}(Y)$. Ist das Normalenbündel $N_X(Y)$ r-positiv, so ist X-Y $(q+r-1)$-konvex.

III.3.3.Folgerung: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $Y\subset X$ lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension q. Ist das Normalenbündel $N_X(Y)$ positiv, so ist X-Y q-konvex. Ist $N_X(Y)$ negativ, so ist X-Y 1-konkav.

Der Fall $X = \mathbb{P}^n$ soll nun noch näher untersucht werden.

III.3.4.Satz: Sei $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension q. Dann ist $\mathbb{P}^n - Y$ q-konvex.

Beweis: Y ist natürlich lokal vollständiger Durchschnitt im $\mathbb{P}^n$, und nach Folgerung II.4.7. ist $N_{\mathbb{P}^n}(Y)$ positiv. Mit III.3.3. folgt die Behauptung.▼

Dieses Ergebnis ist natürlich längst bekannt. Es wurde zuerst von Barth bewiesen(vgl. [3]), und mit anderen Mitteln dann auch von Schneider (vgl. [15]). Das Problem, ob für beliebige vollständige Durchschnitte im $\mathbb{P}^n$ das Normalenbündel stets positiv ist, ist noch offen. Im globalen Fall ist die Antwort allerdings leicht:

III.3.5.Satz: Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine analytische Hyperfläche. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und ein homogenes Polynom F vom Grad k auf $\mathbb{C}^{n+1}$, so daß $X = \{\langle z\rangle \in \mathbb{P}^n : F(z) = 0\}$ ist.
Das Minimum über alle k mit dieser Eigenschaft wird deg X oder der Grad von X genannt.

Beweis: Sei $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ die kanonische Abbildung, $X' := \pi^{-1}(X) \cup \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Nach dem Satz von Remmert-Stein ist X' eine analytische Menge im $\mathbb{C}^{n+1}$. Es gibt dann einen Polyzylinder $P(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ und eine holomorphe Funktion f auf P, so daß $X' \cap P = \{z \in P : f(z) = 0\}$ ist. Wählt man P klein genug, so kann man Polyzylinder $P'(0) \subset \mathbb{C}^n$, $P''(0) \subset \mathbb{C}$, eine Scherung $\sigma : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ und ein Weierstraßpolynom $\omega(z,t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(z)t^i$ über P' finden, so daß gilt: $\sigma^{-1}(P) \subset P' \times P''$, $X'' \cap (P' \times (\mathbb{C} - P'')) = \emptyset$ für $X'' := \sigma^{-1}(X')$ und $f \circ \sigma = e \cdot \omega$ mit einer nirgends verschwindenden holomorphen Funktion e auf $\sigma^{-1}(P)$.
$a_i = \sum_{\lambda=0}^{\infty} q_\lambda^{(i)}$ sei die Entwicklung von a_i nach homogenen Polynomen, $\omega = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda$ sei die Entwicklung von ω nach homogenen Polynomen. Dann ist $p_k(z,t) = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} q_{k-i}^{(i)}(z)t^i$. Für $(z,t) \in X''$ und $c \in \mathbb{C}$ ist auch $(cz,ct) \in X''$, also $0 = \omega(cz,ct) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda(z,t)c^\lambda$. Daraus folgt insbesondere, daß $p_k | X'' = 0$ ist.

Nun gibt es eine offene Teilmenge $U \subset P'$, so daß für jedes $z \in U$ die Funktion $t \mapsto p_k(z,t)$ genau k Nullstellen hat, etwa $t_1, \ldots, t_k$. Das müssen dann aber auch (die einzigen) Nullstellen von $t \mapsto \omega(z,t)$ sein. Also ist $\omega | U \times \mathbb{C} = p_k | U \times \mathbb{C}$. Nach dem Identitätssatz folgt, daß $\omega = p_k$ ist.

Sei $F := \omega \circ \sigma^{-1}$. Dann ist $F(c \cdot z) = c^k \cdot F(z)$, also F ein homogenes Polynom vom Grad k. Außerdem ist $X' \cap P = \{z \in P : F(z) = 0\}$. Da X' ein Kegel ist, folgt nun auch, daß $X' = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : F(z) = 0\}$, also $X = \{\langle z\rangle \in \mathbb{P}^n : F(z) = 0\}$ ist.▼

III.3.6.Satz: Sei $X \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^n$ eine analytische Hyperfläche. Dann ist $N_{\mathbb{P}^n}(X)$ ein positives Geradenbündel über X.

Beweis: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und ein homogenes Polynom $F = F(z_0,\dots,z_n) = \sum_{|\nu|=k} a_\nu z_0^{\nu_0} \dots z_n^{\nu_n}$ vom Grad k, so daß $X = \{\langle z\rangle \in \mathbb{P}^n : F(z) = 0\}$ ist. Sei $H := \{\langle z_0,\dots,z_n\rangle \in \mathbb{P}^n : z_0 = 0\}$, $O(m) = L(H)^m$ für $m \in \mathbb{N}$. Wir werden zeigen, daß $L(X) \cong O(k)$, also $N_{\mathbb{P}^n}(X) = i^*O(k)$ ist. (Nach Satz III.1.9. ist $N_{\mathbb{P}^n}(X)$ dann positiv)

Durch $\hat{F}(\langle z_0,\dots,z_n\rangle) := F(1,\frac{z_1}{z_0},\dots,\frac{z_n}{z_0})$ wird eine meromorphe Funktion $\hat{F}$ auf dem $\mathbb{P}^n$ erklärt, die holomorph auf $U_0 = \mathbb{P}^n - H$ ist und deren Polstellenmenge H ist.

Für $i = 0,\dots,n$ sei nun $g_i : U_i \to \mathbb{C}$ definiert durch $g_i(\langle z_0,\dots,z_n\rangle) := F(\frac{z_0}{z_i},\dots,1,\dots,\frac{z_n}{z_i})$. Dann ist g_i holomorph und $U_i \cap X = \{\langle z\rangle \in U_i : g_i(\langle z\rangle) = 0\}$. Außerdem ist $(\hat{F}|U_i)(\langle z_0,\dots,z_n\rangle) = F(1,\frac{z_1}{z_0},\dots,\frac{z_n}{z_0}) = \sum_{|\nu|=k} a_\nu (\frac{z_1}{z_0})^{\nu_1} \dots (\frac{z_n}{z_0})^{\nu_n} =$

$= (\frac{z_i}{z_0})^k \cdot \sum_{|\nu|=k} a_\nu (\frac{z_0}{z_i})^{\nu_0} \dots (\frac{z_i}{z_i})^{\nu_i} \dots (\frac{z_n}{z_i})^{\nu_n} = (\frac{z_i}{z_0})^k \cdot g_i(\langle z_0,\dots,z_n\rangle)$.

Das bedeutet, daß $\frac{g_i}{g_j} = (\frac{z_i}{z_j})^k$ auf $U_i \cap U_j$ ist. L(X) und O(n) besitzen die gleichen Übergangsfunktionen, sind also isomorph. ▼

III.3.7.Folgerung: Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine analytische Hyperfläche. Dann ist $\mathbb{P}^n - X$ Steinsch.

Beweis: Offensichtlich ist $\mathbb{P}^n - X$ 1-konvex und damit holomorph-konvex. Es gibt eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\phi : \mathbb{P}^n - X \to Y$ auf einen Steinschen Raum Y. Dabei ist ϕ biholomorph auf der Teilmenge, auf der ϕ eineindeutig ist. Die Fasern von ϕ sind kompakte analytische Mengen. Da jede analytische Menge positiver Dimension mit X einen nicht-leeren Durchschnitt hat, ist ϕ biholomorph, also $\mathbb{P}^n - X$ Steinsch. ▼

III.3.8.Satz: $H_1,\dots,H_q \subset \mathbb{P}^n$ seien analytische Hyperflächen, $H := H_1 \cap \dots \cap H_q$ habe überall die Codimension q in $\mathbb{P}^n$ (H heißt dann ein globaler vollständiger Durchschnitt).

Dann ist $N_{\mathbb{P}^n}(H)$ ein positives Vektorbündel vom Rang q. (Insbesondere folgt daraus, daß $\mathbb{P}^n - H$ q-konvex ist)

Beweis: $i_\lambda : H \hookrightarrow H_\lambda$ sei die Inklusion. Nach Satz III.1.11. ist $N_{\mathbb{P}^n}(H) = i_1^*(N_{\mathbb{P}^n}(H_1)) \oplus \dots \oplus i_q^*(N_{\mathbb{P}^n}(H_q))$. Aus Satz III.3.6. und Satz II.4.5. folgt, daß $N_{\mathbb{P}^n}(H)$ positiv ist. ▼

Bemerkung: Da $\mathbb{P}^n - H = \bigcup_{i=1}^q U_i$ mit Steinschen Mannigfaltigkeiten $U_i := \mathbb{P}^n - H_i$ ist, folgt, daß $H^r(\mathbb{P}^n - H, \mathcal{F}) = 0$ für $r \geq q$ und kohärente Garben $\mathcal{F}$ ist. Es ist aber nicht bekannt, ob $\mathbb{P}^n - H$ sogar q-vollständig ist.

Wie bereits bemerkt, ist es bislang nicht einmal bekannt, ob etwa für jeden reduzierten Unterraum des $\mathbb{P}^n$, der lokal vollständiger Durchschnitt ist, das Normalenbündel positiv ist. Sicher ist nicht jedes Normalenbündel zu einem q-codimensionalen Unterraum des $\mathbb{P}^n$ genügend q-konkav, wie das folgende Beispiel zeigt, das bereits in der Arbeit [3] von Barth untersucht wird:

Sei $E_1 := \{\langle z_0,\dots,z_4\rangle \in \mathbb{P}^4 : z_0 = z_1 = 0\}$,
$E_2 := \{\langle z_0,\dots,z_4\rangle \in \mathbb{P}^4 : z_3 = z_4 = 0\}$ und $A := E_1 \cup E_2$.

Dann ist $E_1 \cap E_2 = \{p\}$ mit $p := \langle 0,0,1,0,0\rangle$. Setzt man $C_\lambda := \mathbb{P}^4 - E_\lambda$, so ist $C_1 \cup C_2 = \mathbb{P}^4 - p$ und $C_1 \cap C_2 = \mathbb{P}^4 - A$. Da $C_1 = U_0 \cup U_1$ und $C_2 = U_3 \cup U_4$ ist, folgt mit dem Satz von Leray, daß $H^i(C_\lambda, \mathcal{O}) = 0$ für $i \geq 2$ und $\lambda = 1,2$ ist.

Andererseits steht die Mayer-Vietoris-Sequenz zur Verfügung:

$$\dots \to H^2(C_1,\mathcal{O}) \oplus H^2(C_2,\mathcal{O}) \to H^2(C_1 \cap C_2,\mathcal{O}) \to H^3(C_1 \cup C_2,\mathcal{O}) \to$$
$$\to H^3(C_1,\mathcal{O}) \oplus H^3(C_2,\mathcal{O}) \to \dots$$

So erhält man die exakte Sequenz $0 \to H^2(C_1 \cap C_2,\mathcal{O}) \to H^3(C_1 \cup C_2,\mathcal{O}) \to 0$.

Sei $F := C_1 \cup C_2 = \mathbb{P}^4 - \{p\}$, $q : F \to \mathbb{P}^3$ definiert durch $q(\langle z_0,z_1,z_2,z_3,z_4\rangle) := \langle z_0,z_1,z_3,z_4\rangle$. Durch die Trivialisierungen $\psi_i : q^{-1}(U_i^{(3)}) \to U_i^{(3)} \times \mathbb{C}$ mit $\psi_i(\langle z_0,\dots,z_4\rangle) := (q(\langle z_0,\dots,z_4\rangle), \frac{z_2}{z_i})$ für $i = 0,1,3,4$ wird F zu einem Geradenbündel über $\mathbb{P}^3$ mit Übergangsfunktionen $\frac{z_k}{z_i}$ über $U_i^{(3)} \cap U_k^{(3)}$. Somit ist F isomorph zu dem kanonischen positiven Geradenbündel O(1) über $\mathbb{P}^3$.

Es folgt, daß $H^2(\mathbb{P}^4\text{-}A,\mathcal{O}) \cong H^3(O(1),\mathcal{O})$ ist. Nach [1] gibt es auf $H^3(O(1),\mathcal{O})$ eine natürliche Filtrierung, so daß für die dazu assoziierte Graduierung $gr(H^3(O(1),\mathcal{O}))$ gilt: $gr(H^3(O(1),\mathcal{O})) \cong \bigoplus_{\nu \geq 0} H^3(\mathbb{P}^3,O(-\nu))$.

Wäre $N_{\mathbb{P}^4}(A)$ genügend 2-konkav, also $\mathbb{P}^4$-A 2-konvex, so wäre $H^2(\mathbb{P}^4\text{-}A,\mathcal{O})$ endlich-dimensional. Das ist nur möglich, wenn $H^3(\mathbb{P}^3,O(-\nu)) = 0$ für $\nu \geq \nu_0$ ist. Man kann zeigen, daß $H^3(\mathbb{P}^3,O(-\nu)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Gamma(\mathbb{P}^3,O(\nu-4)),\mathbb{C})$ ist, und das bedeutet, daß $\dim_{\mathbb{C}} H^3(\mathbb{P}^3,O(-\nu)) > 0$ für $\nu \geq 5$ ist. Also ist $N_{\mathbb{P}^4}(A)$ nicht genügend 2-konkav. A ist aber auch nicht lokal vollständiger Durchschnitt im $\mathbb{P}^4$: Auf U_2 hat man Koordinaten t_0,t_1,t_3,t_4 mit $t_i := \frac{z_i}{z_2}$. Es ist $\mathcal{J}(A)_p = (t_0t_3, t_0t_4, t_1t_3, t_1t_4)$, und man kann leicht zeigen, daß $\{t_0t_3, t_0t_4, t_1t_3, t_1t_4\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathcal{J}(A)_p$ ist. Da $\mathrm{codim}_p(A,\mathbb{P}^4) = 2$ ist, kann A im Punkte p nicht vollständiger Durchschnitt sein.

Da $Cg(A) = 4$ ist, liefert Satz III.3.2. bestenfalls, daß $\mathbb{P}^4$-A 4-konvex ist. Das ist aber auch zu erwarten, da $H^r(\mathbb{P}^4\text{-}A,\mathcal{F}) = 0$ für $r \geq 4$ und kohärentes $\mathcal{F}$ ist

ANHANG EINE CHARAKTERISIERUNG DER SCHWACH NEGATIVEN VEKTORBÜNDEL

Es sei X ein kompakter reduzierter komplexer Raum, $E = \mathrm{Vec}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi} X$ ein Vektorbündel vom Rang q über X. $S^n(E) := \mathrm{Vec}(S^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}))$ heißt die n-te symmetrische Tensorpotenz von E. Man zeigt leicht:

1) $(S^n(E))_x = S^n(E_x)$

2) $S^n(E^*) \cong (S^n(E))^*$

A.1.Satz: Die durch $v \mapsto v \otimes \ldots \otimes v$ induzierte kanonische Abbildung $\gamma_n : E \to S^n(E)$ ist fasertreu, holomorph und auf $E - \omega_E(X)$ eine Immersion.

Beweis: Sei $M_n := \{(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n : 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n \leq q\}$, s_n die Anzahl der Elemente von M_n. Ist $\varphi : E_U \to U \times \mathbb{C}^q$ eine Trivialisierung von E, so erhält man auf kanonische Weise eine Trivialisierung $\varphi(n) : S^n(E)_U \to U \times \mathbb{C}^{s_n}$. Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{\gamma_n} & S^n(E)_U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi(n) \\ U \times \mathbb{C}^q & \xrightarrow{\Gamma_n} & U \times \mathbb{C}^{s_n} \end{array}$$

Dabei ist Γ_n die durch $(x,(z_1,\ldots,z_q)) \mapsto (x,(\sum_{\langle\nu\rangle = i} z_{\nu_1} \cdots z_{\nu_n})_{i \in M_n})$ definierte Abbildung. ($\langle\nu\rangle$ bezeichne für beliebiges $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ das zugehörige angeordnete n-Tupel aus M_n)

Es ist trivial, daß γ_n fasertreu und holomorph ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Tangentialabbildung $T_{(x,z)}(\Gamma_n)$ für $z \neq 0$ injektiv ist. Dazu sei $\Phi(z_1,\ldots z_q) := (\sum_{\langle\nu\rangle = i} z_{\nu_1} \cdots z_{\nu_n})_{i \in M_n}$. Wir zeigen, daß die Funktionalmatrix $(D\Phi)_z$ für $z \neq 0$ den Rang q hat:

Unter Verwendung der Formel $(z_1 + \ldots + z_q)^n = \sum_{\lambda_1+\ldots+\lambda_q=n} \frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_q!} z_1^{\lambda_1} \ldots z_q^{\lambda_q}$

erhält man, daß $\Phi(z_1,\ldots,z_q) = (\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_q!} z_1^{\lambda_1} \ldots z_q^{\lambda_q})_{\lambda_1+\ldots+\lambda_q=n}$ ist, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_k}(z_1,\ldots,z_q) = (\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_q!} \cdot \lambda_k \cdot z_1^{\lambda_1} \ldots z_k^{\lambda_k - 1} \ldots z_q^{\lambda_q})_{\lambda_1+\ldots+\lambda_q=n} .$$

Ist $z \neq 0$, so kann man o.B.d.A. annehmen, daß $z_1 \neq 0$ ist. Man erhält:

$$(D\Phi)_z = \begin{pmatrix} n\cdot z_1^{n-1} & , 0 & , 0 , \dots , 0 , 0 \\ n\cdot(n-1)z_1^{n-2}z_2 & , n\, z_1^{n-1} & , 0 , \dots , 0 , 0 \\ \vdots & & \ddots \\ n\cdot(n-1)z_1^{n-2}z_q & , 0 & , 0 , \dots , 0 , n\, z_1^{n-1} \\ & \# & \end{pmatrix} \in M_{s_n,q}(\mathbb{C})$$

Offensichtlich sind die q Spalten linear unabhängig, und das war zu zeigen. ▼

A.2.Definition: Sei X ein reduzierter komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein holomorphes Vektorbündel vom Rang q.

a) E heißt schwach negativ, falls $\omega_E(X)$ in E exzeptionell ist. E heißt schwach positiv, falls E^* schwach negativ ist.

b) Für $x \in X$ sei $V_x(E) := \{ s \in \Gamma(X,E) : s(x) = 0 \}$.
E heißt ampel, falls für jedes $x \in X$ die beiden folgenden kanonischen Sequenzen von $\mathbb{C}$-Vektorräumen exakt sind:
α) $0 \longrightarrow V_x(E) \longrightarrow \Gamma(X,E) \longrightarrow E_x \longrightarrow 0$.
β) $V_x(E) \longrightarrow E_x \otimes_{\mathbb{C}} T^*_{X,x} \longrightarrow 0$.

(Man beachte, daß $E_x \otimes_{\mathbb{C}} T^*_{X,x} \cong E_x \otimes_{\mathcal{H}_{X,x}} \mathfrak{m}_{X,x}$ ist!)

A.3.Satz: Die Voraussetzungen seien wie oben. X sei kompakt.
a) Ist E schwach positiv, so ist $S^n(E)$ ampel für ein geeignetes $n >> 0$.
b) Ist E ampel, so ist E positiv.

Beweis: Der Beweis von a) beruht darauf, daß für schwach positives E gilt: Für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $H^q(X, \mathcal{F} \otimes S^n(E)) = 0$ für $q > 0$ und $n \geq n_0$ ist. Man kann dann den Beweis von Ph.A.Griffiths wörtlich übernehmen. Das trifft auch auf den Beweis von b) zu, wobei man sich überlegen muß, daß sich alle Argumente von Griffiths auch in der Tat auf den Fall eines nicht-regulären Basisraumes X übertragen. Das ist aber nicht schwer. Man erhält in der Tat die Positivität, wie sie in dieser Arbeit eingeführt wurde. ▼

A.4.Definition: Sei E ein q-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $h : E \times E \to \mathbb{C}$ heiße n-hermitesch, falls es eine hermitesche Form $\tilde{h} : S^n(E) \times S^n(E) \to \mathbb{C}$ gibt, so daß $h(v,w) = \tilde{h}(\gamma_n(v), \gamma_n(w))$ für alle $v,w \in E$ ist. h heißt positiv definit, falls $h(v,v) > 0$ für alle $v \in E - \{0\}$ ist.

Bemerkung: Ist $h : E \times E \to \mathbb{C}$ n-hermitesch, so ist $h(\lambda v, \varrho w) = \lambda^n \bar{\varrho}^n h(v,w)$. Insbesondere ist $\chi_h : E \to \mathbb{R}$ mit $\chi_h(v) := h(v,v)$ reell homogen vom Grad 2n.

A.5.Satz: Sei X ein reduzierter kompakter komplexer Raum, $E \xrightarrow{\pi} X$ ein holomorphes Vektorbündel über X. E ist genau dann schwach negativ, wenn es eine differenzierbare Abbildung $h : E \times_X E \to \mathbb{C}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt:

a) $\chi_h \big| E - \omega_E(X)$ ist 1-konvex.

b) $h \big| E_x \times E_x$ ist für jedes $x \in X$ eine positiv definite n-hermitesche Form.

Beweis: Bekanntlich ist E genau dann schwach negativ, wenn es eine 1-konvexe relativ-kompakte Umgebung des Nullschnittes in E gibt. Es ist also nur noch die Notwendigkeit des Kriteriums zu zeigen:

Ist E schwach negativ, so ist E^* schwach positiv, also $S^n(E^*) = (S^n(E))^*$ ampel und damit positiv. Also ist $S^n(E)$ negativ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Es gibt ein Skalarprodukt $\tilde{h}$ auf $S^n(E)$, so daß $\chi_{\tilde{h}}$ auf $S^n(E) - \omega(X)$ 1-konvex ist. Sei $h := \tilde{h} \circ (\gamma_n \times_X \gamma_n)$. Dann ist $h : E \times_X E \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Abbildung, und für jedes $x \in X$ ist $h \big| E_x \times E_x$ eine n-hermitesche positiv definite Form. Weiter ist $\chi_h = \chi_{\tilde{h}} \circ \gamma_n$. Da γ_n auf $E - \omega_E(X)$ eine Immersion ist, folgt, daß χ_h auf $E - \omega_E(X)$ 1-konvex ist. ▼

A.6.Folgerung: Ist E schwach negativ (über einem kompakten Raum), so ist E genügend 1-konvex.

Beweis: Sei h wie in Satz A.5. gewählt, $U := \{v \in E : \chi_h(v) < \varepsilon\} = \{v \in E : (\chi_h - \varepsilon)(v) < 0\}$. Dann ist (wegen $\chi_h(rv) = r^{2n} \cdot \chi_h(v)$) $\overline{U \cap E}_x$ für jedes $x \in X$ relativ-kompakt und sternförmig bezüglich 0_x in E_x.

Mit der Eulerschen Homogenitätsrelation folgt außerdem: $\langle \operatorname{grad}(\chi_h - \varepsilon) \big| E_x)_v, v \rangle = \langle \operatorname{grad}(\chi_h \big| E_x)_v, v \rangle = 2n \cdot \chi_h(v) = 2n \cdot \varepsilon$ für $v \in \partial U$. Also ist $F(\chi_h - \varepsilon)(v) \neq 0$ für $v \in \partial U$. Damit ist E genügend 1-konvex. ▼

A.7.Folgerung: Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $Y \subset X$ ein lokal vollständiger Durchschnitt. Ist $N_X(Y)$ schwach negativ, so ist X-Y 1-konkav.

Literaturverzeichnis

1 Andreotti, A. , Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull.Soc.math.France 90 (193-259), 1962

2 Andreotti, A., Norguet,F.: Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie. Ann.d.Scuola Norm.Sup.di Pisa 20 (197-241), 1966

3 Barth, W.: Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projektiven Raum, Math.Ann. 187 (150-162), 1970

4 Ephraim, R.: C^{∞} and analytic equivalence of singularities. Rice University Studies, vol 59, 1973

5 Fischer, G.: Eine Charakterisierung von holomorphen Vektorraumbündeln. Sitzungsberichte der Bayer.Akad. d. Wiss., Math. Nat.Klasse, 1966

6 Fischer, G.: Lineare Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen. Archiv der Math. 18 (609-617), 1967

7 Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146 (331-368), 1962

8 Grauert, H., Kerner, H.: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. 153 (236-260), 1964

9 Grauert, H., Remmert, R.: Analytische Stellenalgebren. Springer-Verlag/Grundlehren Bd. 176, Berlin-Heidelberg-New York 1971

10 Grauert, H., Remmert, R.: Ausarbeitungen zur Theorie analytischer Räume (unter Mitarbeit von D. Denneberg, M. Range, O. Riemenschneider, W. Barth), Universität Göttingen, ca. 1968

11 Malgrange, B.: Ideals of differentiable functions. Tata Institute of Fund. Res. Studies, Mathematics, Oxford University press 1966

12 Milnor, J.: Lectures on the h - cobordism theorem. Princeton Mathematical Notes, Princeton University Press 1965

13 Richberg, R.: Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. Math. Ann. 175 (257-286), 1968

14 Schafmeister, O.: Differenzierbare Räume. Forschungsber. d. Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 2140, Westdt. Verlag, Köln + Opladen 1970

15 Schneider, M: Über eine Vermutung von Hartshorne. Math. Ann. 201 (221-229), 1973

16 Schuster, H.W.: Deformationen analytischer Algebren. Inventiones math. 6 (262-274), 1968

17 Spallek, K.: Differential forms on differentiable spaces. Rendiconti di Matematica, 4, Serie VI, 1971

Lebenslauf

Am 4. Juni 1946 wurde ich als einziger Sohn des Chemotechnikers Bernhard Fritzsche und dessen Ehefrau Anneliese, geb. Behrens, in Hützel, Kreis Soltau, geboren. 1949 zogen wir nach Süddeutschland.

Ab Herbst 1952 besuchte ich die Volksschule in Bobingen bei Augsburg und ab Herbst 1956 das Realgymnasium in Augsburg, wo ich im Juli 1965 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1965/66 begann ich an der Universität Göttingen das Studium der Physik mit dem Nebenfach Mathematik, zwei Semester später wählte ich Mathematik als Hauptfach. Nach dem Vordiplom am 29.4.1968 spezialisierte ich mich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. H. Grauert auf die komplexe Analysis, befaßte mich aber auch mit mathematischen Problemen der theoretischen Physik. Meine Diplomprüfung in Mathematik legte ich am 30.4.1971 mit einer Arbeit über platte holomorphe Abbildungen ab. Anschließend erhielt ich die Möglichkeit, zusammen mit Herrn Grauert und auf der Grundlage seiner Vorlesung ein Lehrbuch über Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher zu verfassen. Auf eigenen Wunsch erhielt ich ein Arbeitsgebiet,in dem im Gegensatz zu dem mehr algebraischen Thema meiner Diplomarbeit in stärkerem Maße die differentialgeometrischen und differentialtopologischen Methoden zur Anwendung kommen.

Nach mehrjähriger Tätigkeit als Hilfsassistent und Verwalter einer Assistentenstelle arbeite ich seit Juni 1973 als wissenschaftlicher Assistent am mathematischen Institut in Göttingen. Zusammen mit meiner Frau Renate und meinem Sohn Thomas lebe ich in Rosdorf bei Göttingen.